S3 Cálculo de límites de funciones. Resolución de indeterminaciones.

Problema 19. d) Como $\lim_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}=1$ y $\lim_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{x\log a}-1}{x}$ hacemos el cambio $h=x\log a$ para tener que

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h/\log a}=\log(a).$$

Problema 23. b) Se trata de una indeterminación del tipo ∞^0 que se reduce tomando logaritmos. Si

$$L=\lim_{x\to+\infty}(5x^3+4x-1)^{\frac{1}{\log(x^p+7x-5)}},\ \text{entonces}\ \log L=\lim_{x\to+\infty}\log\left((5x^3+4x-1)^{\frac{1}{\log(x^p+7x-5)}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(5x^3+4x-1)}{\log(x^p+7x-5)}.$$

Esta indeterminación es de tipo ∞/∞ y se resuelve sacando factor común la mayor potencia (x^3 del numerador y x^p del denominador), descomponiendo el logaritmo y sacando factor común $\log x$:

$$\log L=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(5x^3+4x-1)}{\log(x^p+7x-5)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\log x+\log(5+4/x^2-1/x^3)}{p\log x+\log(1+7/x^{p-1}-5/x^p)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\log(5+4/x^2-1/x^3)/\log x}{p+\log(1+7/x^{p-1}-5/x^p)/\log x}=\frac{3}{p}.$$

Así despejando $L=e^{3/p}$.
f) Compara los grados para tener que el resultado es $-3/7$. g) Si $k=1$ simplifica y el límite es 1 y en otro caso compara los grados para ver que el resultado es $+\infty$. i) Piensa que $\sqrt{x}=x^{1/2}$ y procede como en la segunda parte del apartado b) para obtener que el resultado es $2/(1/2)=4$.

S4 Continuidad de funciones

Problema 26. Si sustituimos directamente $f(0)=\dfrac{0}{A-1}=0$ siempre que $A\neq 1$. Así si $A\neq 1$ la función f es continua en el punto $a=0$ para cualquier B y C con $f(0)=0$.
Suponemos entonces que $A=1$. Entonces

$$f(x)=\frac{(e^x-B)x}{Cx+\cos(x)-1},$$

y $f(0)$ no se puede calcular (es una indeterminación $0/0$) con lo que calculamos

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-B)x}{Cx+\cos(x)-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-B}{C+\frac{\cos(x)-1}{x}}.$$

Como hicimos en el **Problema 21** (**S.3**) usamos que $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}=1$ para tener que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}\frac{\cos(x)+1}{\cos(x)+1}=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}^2(x)}{x(\cos(x)+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}(-\operatorname{sen}(x))\frac{1}{\cos(x)+1}=0.$$

En definitiva para $A=1$ la función será continua si definimos:

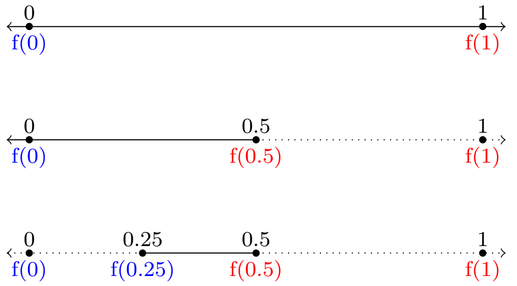
$$f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-B)x}{Cx+\cos(x)-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-B}{C+\frac{\cos(x)-1}{x}}=\frac{1-B}{C}.$$

Así, en este caso ($A=1$) si $C\neq 0$ siempre será continua. Pero si $C=0$ entonces $f(0)$ sólo tendría sentido si $B=1$ (porque $(1-B)/C$ sería de nuevo $0/0$) en cuyo caso:

$$f(x)=\frac{x(e^x-1)}{\cos(x)-1}=\frac{e^x-1}{\frac{\cos(x)-1}{x}}=\frac{\frac{e^x-1}{x}}{\frac{\cos(x)-1}{x^2}},$$

que tiene límite -1 si $x\to 0$.

Problema 30. a) Aplicamos el Teorema de Bolzano con $f(x) = x^3 - 3x + 1$ (que es continua en $\mathbb{R}$, en particular en $[0, 1]$) y mediante el Método de la bisección tenemos:



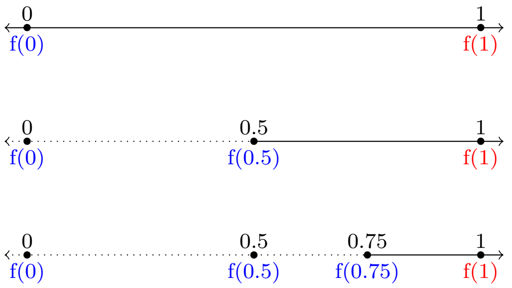
habrá un cero en $(0, 1)$

habrá un cero en $(0, 0.5)$: la aproximación es $x_1 = 0.5$

habrá un cero en $(0.25, 0.5)$: la aproximación es $\mathbf{x_2} = 0.25$

La aproximación será $x = 0.25$.

b) Aplicamos ahora el Teorema de Bolzano con $f(x) = \cos(x) - x$ (que es continua en $\mathbb{R}$, en particular en $[0, 1]$) y mediante el Método de la bisección tenemos:



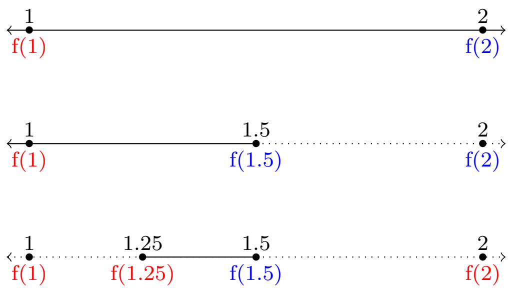
habrá un cero en $(0, 1)$

habrá un cero en $(0.5, 1)$: la aproximación es $x_1 = 0.5$

habrá un cero en $(0.75, 1)$: la aproximación es $\mathbf{x_2} = 0.75$

La aproximación será $x = 0.75$.

c) Aplicamos ahora el Teorema de Bolzano con $f(x) = \log(x) - e^{-x}$ (que es continua en $(0, \infty)$, en particular en $[1, 2]$) y mediante el Método de la bisección tenemos:



habrá un cero en $(1, 2)$

habrá un cero en $(1, 1.5)$: la aproximación es $x_1 = 1.5$

habrá un cero en $(1.25, 1.5)$: la aproximación es $\mathbf{x_2} = 1.25$

La aproximación será $x = 1.25$.

$\boxed{\mathbb{S}\mathbf{2}}$ Propuestos Semana 2

Problema 11. a)-d) Son indeterminaciones de tipo $0/0$.

a) Como $a = 4$ es raíz de ambos polinomios se puede factorizar (en términos de $x - 4$). Hazlo, simplifica y comprueba que el límite es $3/8$. b) Multiplica por el conjugado y simplifica para tener que el límite es $1/4$. c) Haz la división (por Ruffini o usando la fórmula de $a^3 - b^3$) para llegar a que el límite es 1. d) Aplica la fórmula de factorización de $a^3 - b^3$ para llegar a que el límite es $1/3$.

e) El límite es 0 (porque es 0·acotado). f) En este caso tenemos una indeterminación ∞/∞. Saca factor común la base mayor (que es 5^x) para tener que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x + 3^x}{4^x + 5^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(2/5)^x + (3/5)^x}{(4/5)^x + 1} = 0.$$

Problema 12. a) Se trata de una indeterminación de tipo $0/0$ que se resuelve operando. Sube $1/x$ dentro del logaritmo para tener una indeterminación 1^∞ que mediante la Fórmula de Euler (y un límite importante) proporciona el valor 1. b) Es una indeterminación del tipo 1^∞. En lugar de aplicar la Fórmula de Euler sin pensar pon primero la raíz como potencia $1/2$ y luego aplica la fórmula para tener:

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}^{1/x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^{1/2x} = e^1 = e.$$

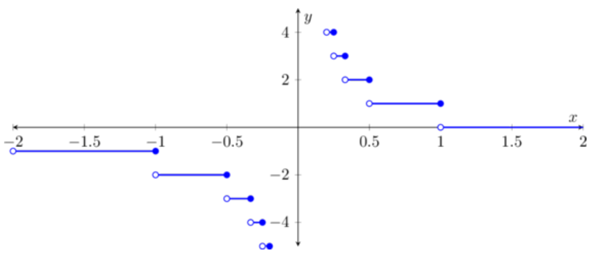
c) Es una indeterminación del tipo ∞/∞. Saca arriba y abajo factor común la mayor potencia (que es x^2), descompón el logaritmo y vuelve a sacar factor común (ahora $\log x$) para tener:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(3x^2+5x+3)}{\log(7x^2-5)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\log x+\log(3+5/x+3/x^2)}{2\log x+\log(7-5/x^2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{\log(3+5/x+3/x^2)}{\log x}}{2+\frac{\log(7-5/x^2)}{\log x}}=1.$$

Problema 16.

$\boxed{f}$ Si $n\le x<n+1$ entonces $1/(n+1)<1/x\le 1/n$. Entonces:

- Si $x>1$ entonces $0<\dfrac{1}{x}<1$ con lo que $f(x)=\left[\dfrac{1}{x}\right]=0$.
- En el caso en que $0<x\le 1$ podemos ir dividiendo:
  - Si $\dfrac{1}{2}<x\le 1$ entonces $1\le\dfrac{1}{x}<2$ con lo que $f(x)=1$.
  - Si $\dfrac{1}{3}<x\le\dfrac{1}{2}$ entonces $2\le\dfrac{1}{x}<3$ con lo que $f(x)=2$.
  - Si $\dfrac{1}{4}<x\le\dfrac{1}{3}$ entonces $3\le\dfrac{1}{x}<4$ con lo que $f(x)=3$.
  - Y así sucesivamente...
- Haz tú ahora un proceso similar para los negativos y comprueba la gráfica.



La función es continua en $\mathbb{R}$ salvo en el conjunto $\Omega=\left\{\dfrac{1}{n}:n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}\cup\{0\}$.

$\boxed{g}$ Como la función es par basta hacer la gráfica para $x>0$. Pero:

- En primer lugar $g(0)=0$.
- Si $0<x<1$ entonces $-1<-x<0$ con lo que $g(x)=0+(-1)=-1$.
- Luego $g(1)=1+(-1)=0$.
- Si $1<x\le 2$ entonces $-2<-x<-1$ con lo que $g(x)=1+(-2)=-1$.
- Ahora $g(2)=2+(-2)=0$.
- Si $2<x\le 3$ entonces $-3<-x<-2$ con lo que $g(x)=2+(-3)=-1$.
- Y así sucesivamente...

En otras palabras g es la función constante igual a -1 salvo en los número enteros que vale 0.

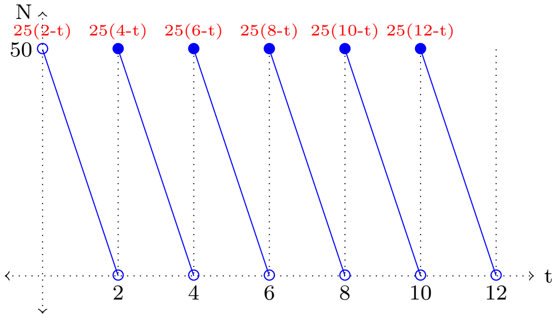
$\boxed{h}$ Fíjate que $h(x)=-(x-[x])$ y la función $x-[x]$ la vimos en el **Problema 28** (**S.4**). Así h no es más que la función simétrica respecto del eje X de aquella.

Problema 19. Como la variable es el tiempo $t>0$. Veamos primero cuánto vale la función $\left[\dfrac{t+2}{2}\right]$. En primer lugar como $t>0$ entonces $\dfrac{t+2}{2}>1$, luego:

- $1<\dfrac{t+2}{2}<2$ si $0<t<2$. Y en este caso $N(t)=25(2-t)$.
- $2\le\dfrac{t+2}{2}<3$ si $2\le t<4$. Y en este caso $N(t)=25(4-t)$.
- $3\le\dfrac{t+2}{2}<4$ si $4\le t<6$. Y en este caso $N(t)=25(6-t)$.
- $4\le\dfrac{t+2}{2}<5$ si $6\le t<8$. Y en este caso $N(t)=25(8-t)$.
- Y así sucesivamente...

es decir $$N(t)=\begin{cases}25(2-t), & t\in(0,2)\\ 25(4-t), & t\in[2,4)\\ 25(6-t), & t\in[4,6)\\ 25(8-t), & t\in[6,8)\\ \quad\vdots & \end{cases}.$$

Cada trozo de función es una recta de pendiente -1. Pero todas empiezan en la altura 50 y acaban en altura 0 con lo que la gráfica de la función es:



Finalmente, la empresa tendrá que reponer existencias cuando $N(t) = 0$ lo que ocurre cada 2 meses.

Problema 20. Como el volumen de una esfera de radio r es $V(r) = (4/3)\pi r^3$ es una función continua en $\mathbb{R}$, en particular lo es en $[5, 8]$, y como 1500 está entre $f(5) \approx 523.6$ y $f(8) \approx 2144.66$ por el Teorema de los valores intermedios existe al menos un $r_0 \in (5, 8)$ tal que $V(r_0) = 1500$.