$\boxed{\mathbb{S}3}$ Propuestos Semana 3

Ejercicio 21. a) Se trata de de una indeterminación $\infty\cdot 0$ que reducimos operando.
Aplica la fórmula $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ con $a=\sqrt[3]{27-1/n}$ y $b=3$ para llegar a que

$$\lim_n n\left(\sqrt[3]{27-\frac{1}{n}}-3\right)=\lim_n \frac{-1}{\sqrt[3]{(27-\frac{1}{n})^2}+3\sqrt[3]{27-\frac{1}{n}}+9}=-\frac{1}{27}.$$

b) Indeterminación del tipo 1^∞ que mediante la Fórmula de Euler proporciona que el límite es e^6. c) Es una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ que resolvemos operando. Saca para ello factor común la mayor base del numerador (7^n) y del denominador (también 7^n) para obtener que

$$\lim_n \frac{3^n+7^n}{7^{n+1}-3^n}=\lim_n \frac{(3/7)^n+1}{7-(3/7)^n}=\frac{1}{7}.$$

d) El límite del numerador no existe pero como $\operatorname{sen}(n!)$ está entre -1 y 1 calculamos $\lim_n \frac{n+5^n}{n-7^n}$ que es una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Procediendo como en el apartado anterior:

$$\lim_n \frac{n+5^n}{n-7^n}=\lim_n \frac{5^n}{7^n}\cdot\frac{n/5^n+1}{n/7^n-1}=\lim_n \left(\frac{5}{7}\right)^n\frac{n/5^n+1}{n/7^n-1}.$$

Fíjate que $\lim_n \frac{n}{5^n}=\lim_n \frac{n}{7^n}=0$. Por ejemplo, para ver que $\lim_n \frac{n}{5^n}=0$ aplicamos el Criterio del Sandwich:

como $\boxed{\begin{array}{c|c} (n) & (1,2,3,4,\ldots) \\ (2^n) & (2,4,8,16,\ldots) \end{array}}$ entonces $n\le 2^n$ luego $0\le \frac{n}{5^n}\le\frac{2^n}{5^n}=\left(\frac{2}{5}\right)^n\to 0$

Así $\lim_n \frac{n+5^n}{n-7^n}=0$ y por tanto el original también.

Ejercicio 26. Fíjate que queremos calcular el límite de la sucesión $s_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$, que es la sucesión de la sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$. Pero esta serie es una serie geométrica convergente (de razón $r=1/2$ y $a=-1$):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n=-1.$$

Y como la suma de una serie es, por definición, el límite de sus sumas parciales entonces el valor del límite pedido es -1.

Ejercicio 27. a) Es una serie geométrica de razón $r=\log(x)$ que será convergente si $|\log(x)|<1$. Esto ocurre si $-1<\log(x)<1$. Es decir si $e^{-1}<x<e$. En este caso

$$\log(x)+\big(\log(x)\big)^2+\big(\log(x)\big)^3+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\big(\log(x)\big)^n=\frac{\log(x)}{1-\log(x)}.$$

b) De nuevo es una serie geométrica de razón $r=2^x$ que converge si $2^x<1$. Esto ocurre si $x\in(-\infty,0)$ en cuyo caso:

$$2^x+4^x+8^x+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(2^x)^n=\frac{2^x}{1-2^x}.$$

Ejercicio 29. Se trata de dos series telescópicas que se hacen descomponiendo en fracciones simples.

a) Comprueba que $a_n = \dfrac{1}{n^2-1} = \dfrac{1/2}{n-1} + \dfrac{-1/2}{n+1}$

$$\boxed{\begin{array}{lcl}
a_2 & = & \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \\
a_3 & = & \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \\
a_4 & = & \frac{1}{6} - \frac{1}{10} \\
a_6 & = & \frac{1}{8} - \frac{1}{12} \\
 & \vdots & \\
a_{n-1} & = & \frac{1/2}{n-2} - \frac{1/2}{n} \\
a_n & = & \frac{1/2}{n-1} - \frac{1/2}{n+1}
\end{array}}$$

sumando $s_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1/2}{n} - \dfrac{1/2}{n+1}$ y tomando límites $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}$.

b) Comprueba ahora que que $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \dfrac{1/6}{n} + \dfrac{-1/2}{n+1} + \dfrac{1/2}{n+2} + \dfrac{-1/6}{n+3}$.

$$\boxed{\begin{array}{lcllll}
a_2 & = & \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & +\frac{1}{8} & -\frac{1}{30} \\
a_3 & = & \frac{1}{18} & -\frac{1}{8} & +\frac{1}{10} & -\frac{1}{36} \\
a_4 & = & \frac{1}{24} & -\frac{1}{10} & +\frac{1}{12} & -\frac{1}{42} \\
a_5 & = & \frac{1}{30} & -\frac{1}{12} & +\frac{1}{14} & -\frac{1}{48} \\
a_6 & = & \frac{1}{36} & -\frac{1}{14} & +\frac{1}{16} & -\frac{1}{54} \\
 & \vdots & & & & \\
a_{n-2} & = & \frac{1/6}{n-2} & -\frac{1/2}{n-1} & +\frac{1/2}{n} & -\frac{1/6}{n+1} \\
a_{n-1} & = & \frac{1/6}{n-1} & -\frac{1/2}{n} & +\frac{1/2}{n+1} & -\frac{1/6}{n+2} \\
a_n & = & \frac{1/6}{n} & -\frac{1/2}{n+1} & +\frac{1/2}{n+2} & -\frac{1/6}{n+3}
\end{array}}$$

sumando $s_n = \dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{18} + \dfrac{1}{24} - \dfrac{1/6}{n+1} - \dfrac{1/6}{n+2} + \dfrac{1/2}{n+2} - \dfrac{1/6}{n+3}$
y tomando límites

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{24} = \frac{1}{72}.$$

Ejercicio 30. Aunque la serie se parece a una geométrica no lo es (este tipo de series se llama, de hecho, aritmético-geométrica). Si como en el caso de la geométrica llamamos $r = -1/5$ tenemos:

$$\begin{array}{rcl}
s_n & = & 1\left(\frac{-1}{5}\right) + 2\left(\frac{-1}{5}\right)^2 + 3\left(\frac{-1}{5}\right)^3 + 4\left(\frac{-1}{5}\right)^4 + \ldots + (n-1)\left(\frac{-1}{5}\right)^{n-1} + n\left(\frac{-1}{5}\right)^n \\
\frac{-1}{5}s_n & = & \qquad 1\left(\frac{-1}{5}\right)^2 + 2\left(\frac{-1}{5}\right)^3 + 3\left(\frac{-1}{5}\right)^4 + \ldots + (n-2)\left(\frac{-1}{5}\right)^{n-1} + (n-1)\left(\frac{-1}{5}\right)^n + n\left(\frac{-1}{5}\right)^{n+1}
\end{array}$$

restando (como para obtener la fórmula de la serie geométrica) tenemos

$$\frac{6}{5}s_n = \underbrace{\left(\frac{-1}{5}\right) + \left(\frac{-1}{5}\right)^2 + \left(\frac{-1}{5}\right)^3 + \left(\frac{-1}{5}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{-1}{5}\right)^n}_{\text{sumas parciales de una serie geométrica de razón } r} - n\left(\frac{-1}{5}\right)^{n+1}$$

Fíjate que el último término tiene límite cero pues (mira el **Ejercicio 1** d)): $\lim\limits_{n} \left| n\left(\frac{-1}{5}\right)^{n+1} \right| = \frac{1}{5} \lim\limits_{n} \frac{n}{5^n} = 0.$

Así tomando límites:

$$\frac{6}{5}\lim_{n} s_n = -\frac{1}{6} \text{ con lo que despejando } \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{-1}{5}\right)^n = -\frac{5}{30}.$$