$\mathbb{S}4$ Propuestos Semana 4

Ejercicio 31. a) Aplica, por ejemplo, el criterio del cociente (de D'Alembert) para obtener que la serie converge puesto que: $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$. b) Aplicando el criterio del cociente el límite sale 1 y por lo tanto aplicando el criterio de Raabe la serie converge pues: $\lim_n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) n = \frac{3}{2} > 1$. c) De nuevo, el criterio del cociente sale 1 y usando el criterio de Raabe la serie converge puesto que el límite sale: $\lim_n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) n = \frac{4}{3} > 1$.

Ejercicio 33. a) Aplicando el criterio del cociente tenemos que

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = x^2 \text{ con lo que convergerá si } x \in (-1,1) \text{ y divergerá si } x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty).$$

Para $x^2 = 1$ (es decir si $x = \pm 1$) no podemos afirmar nada. Pero sustituyendo la serie converge (por comparación con la serie armónica generalizada de índice $p = 3/2 > 1$). En definitiva converge si, y sólo si, $x \in [-1,1]$.

b) En este caso la serie no es de términos positivos pero como:

$$\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2\operatorname{sen}^2(x) \text{ convergerá si } 2\operatorname{sen}^2(x) < 1 \text{ y divergerá si } 2\operatorname{sen}^2(x) > 1.$$

Así pues convergerá (de hecho absolutamente) si $|\operatorname{sen}(x)| < \frac{\sqrt{2}}{2}$ y divergerá si $|\operatorname{sen}(x)| > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Como en el caso anterior si $2\operatorname{sen}^2(x) = 1$ el criterio del cociente no permite afirmar nada. Pero en este caso como $\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2}$ si sustituimos en la serie obtenemos que la serie es la armónica alternada que sabemos que es convergente.

c) Si aplicamos ahora el criterio de la raíz de Cauchy (también se podría hacer por el cociente) tenemos que:

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \text{ con lo que convergerá si } x \in (-1,1) \text{ y divergerá si } x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty).$$

Queda ver que pasa si $|x| = 1$. Ahora bien si $x = 1$ tenemos una serie cuyo término general no tiene límite nulo (su límite sale e^{-1}) y por el criterio general de divergencia la serie diverge. Para $x = -1$ se trata de una serie alternada y de nuevo el término general no tiene límite nulo (en este caso el límite no existe) y por lo tanto la serie es también divergente en este caso. En definitiva la serie converge si, y sólo si, $x \in (-1,1)$.

Ejercicio 35. a) La serie converge (de hecho absolutamente) pues, mediante el criterio del cociente, $\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{3}{5} < 1$. b) De nuevo converge (absolutamente) por el criterio del cociente pues en este caso el límite sale $\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{e} < 1$. c) Igualmente la serie converge (absolutamente) pues $\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0 < 1$.

Ejercicio 37. a) Como $\lim_n \operatorname{atan}(n) = \frac{\pi}{2}$ entonces $\lim_n (-1)^n \frac{1}{\operatorname{atan}(n)}$ no existe. Como el término general de la serie no tiene límite nulo usando el criterio general de divergencia la serie diverge. b) Como $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = 0 < 1$ por el criterio de la raíz la serie es absolutamente convergente. c) Como en el apartado a) límite del término general no existe (en particular no es cero) luego por el criterio general de divergencia la serie diverge.

Ejercicio 39. En primer lugar la serie es convergente por el criterio de Leibniz. Como

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}+1} \text{ es una sucesión decreciente, por el criterio del resto } |S - s_n| \le b_{n+1}.$$

Como queremos tener cuatro cifras decimales queremos que $|S - s_n| \le 10^{-5}$ con lo que

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+1} \le 10^{-5} \iff n \ge (10^5-1)^2 - 1. \text{ Así una aproximación será } s_n = \sum_{n=0}^{(10^5-1)^2-1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}.$$