ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIEROS INDUSTRIALES VALENCIA

Primer Parcial de Matemáticas II
Grado Ingeniería Biomédica

ETSII de València. Marzo de 2016

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Apellidos	Nombre

Instrucciones

1. Comienza poniendo el nombre y apellidos.
2. En la pregunta de Verdadero o Falso marca claramente tu respuesta. En otro caso la pregunta no será puntuada.
3. Excepto en la primera pregunta pon todos los cálculos necesarios.
4. No se puede usar ningún tipo de material de consulta ni asistentes electrónicos.
5. Escribe con bolígrafo azul o negro.
6. El tiempo total es de 2 horas.

Nota final

Puntuación

Ejercicio 1	1	_____
	2	_____
Ejercicio 2	1	_____
	2	_____
Ejercicio 3		_____
Ejercicio 4		_____
Ejercicio 5	1	_____
	2	_____

Ejercicio 1 `—10 puntos: 5 puntos cada apartado—`

1 Indica si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas (no hay que justificar nada).

V / **F**	*La función $f(x) = \|x\|$ es derivable en $a = 1$.*
V / **F**	*La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+n^2+1}$ es convergente.*
V / **F**	*La ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ tiene exactamente una solución en el intervalo $[0, 1]$.*
V / **F**	*La serie armónica alternada es absolutamente convergente.*
V / **F**	*Si $f'(x) > 0$ entonces la función $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ es decreciente.*
V / **F**	*Si $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) > 0$ entonces la función $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ es creciente.*
V / **F**	*El criterio de Leibniz asegura que si (a_n) es creciente y con límite nulo entonces la serie alternada $\sum_n (-1)^n a_n$ converge.*
V / **F**	*Una serie geométrica de razón r converge si, y sólo si, $r < 1$.*
V / **F**	$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(2n^3+7n+1)}{\log(3n^2+5n+2)} = \frac{2}{3}$.
V / **F**	*La ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^2$ en $a = 1$ es $y - 1 = 2(x - 1)$.*

2 Demuestra que si una función tiene derivada negativa en un entorno de un punto entonces la función es decreciente en dicho entorno.

Solución *Como queremos ver que la función es decreciente, si tomamos x_1, x_2 en el entorno del punto verificando la desigualdad* $\boxed{\mathbf{x_1 < x_2}}$ *entonces tenemos que demostrar la desigualdad* $\boxed{\mathbf{f(x_1) \geq f(x_2)}}$ *o, lo que es lo mismo, que $f(x_2) - f(x_1)$ tiene signo* $\boxed{\textbf{negativo}}$.

Para ello, aplicamos el $\boxed{\textbf{Teorema del valor medio}}$ *en el intervalo cerrado* $\boxed{\mathbf{[x_1, x_2]}}$ *que nos proporciona un punto c en el intervalo abierto* $\boxed{\mathbf{(x_1, x_2)}}$ *de forma que se cumple la igualdad:*

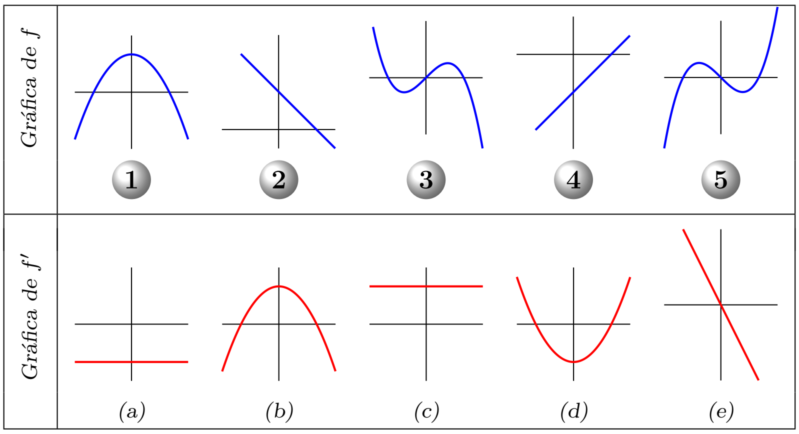
$$\boxed{\mathbf{f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)}}$$

Como por hipótesis la función es decreciente en el entorno entonces la segunda parte de la igualdad anterior tiene signo $\boxed{\textbf{negativo}}$ *y por lo tanto $f(x_2) - f(x_1)$ tiene signo* $\boxed{\textbf{negativo}}$ *porque $x_2 - x_1$ tiene signo* $\boxed{\textbf{positivo}}$.

Y eso es lo que queríamos demostrar.

Ejercicio 2 —`10 puntos: 5 puntos cada apartado`—

1. Completa la tabla de la derecha relacionando las gráficas de las funciones con la de su correspondiente derivada.



1	(e)
2	(a)
3	(b)
4	(c)
5	(d)

2. Descomponer el número e como suma de dos números positivos de forma que la suma de los logaritmos neperianos de los dos sumandos sea máxima. Suponiendo que $\ln(2) \approx 0.7$ demuestra que el valor de dicha suma es aproximadamente 0.6.

Sean x e y dos números positivos tal que $\mathbf{e = x + y}$, es decir $\mathbf{y = e - x}$.
Queremos optimizar

$$\mathbf{F(x, y) = \ln(x) + \ln(y) \Longrightarrow f(x) = \ln(x) + \ln(e - x).}$$

Para ello derivamos e igualamos a cero:

$$\mathbf{f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{e - x}(-1) = \frac{e - 2x}{e - x} = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{e}{2},}$$

que es un máximo pues:

$$\mathbf{f''(x) = \frac{(-2)(e - x) - (e - 2x)(-1)}{(e - x)^2} \Longrightarrow f''(\frac{e}{2}) = -\frac{4}{e} < 0.}$$

Finalmente la suma es

$$\mathbf{f(\frac{e}{2}) = \ln(\frac{e}{2}) + \ln(\frac{e}{2}) = 2\ln(\frac{e}{2}) = 2\big(\ln(e) - \ln(2)\big) \approx 2(1 - 0.7) = 0.6.}$$

Ejercicio 3 Calcula $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^n+5^n}{5^n+3^n}\right)^{(5/2)^n}$.

Como

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+5^n}{5^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n\big((2/5)^n+1\big)}{5^n\big(1+(3/5)^n\big)}=1 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^n=+\infty,$$

se trata de una indeterminación del tipo 1^∞ que resolvemos mediante la Fórmula de Euler:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n+5^n}{5^n+3^n}\right)^{(5/2)^n} &= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^n+5^n}{5^n+3^n}-1\right)\left(\frac{5}{2}\right)^n}\\ &= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^n-3^n}{5^n+3^n}\right)\left(\frac{5}{2}\right)^n}\\ &= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10^n-15^n}{10^n+6^n}}\\ &= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{15^n\big((10/15)^n-1\big)}{10^n\big(1+(6/10)^n\big)}}\\ &= e^{-\infty}=0.\end{aligned}$$

Ejercicio 4 Estudia el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{2^n n!}$.

Aplicando el Criterio de D'Alembert del cociente:

$$\begin{aligned} \alpha = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdots (2(n+1)+1)}{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n+2} = 1. \end{aligned}$$

Aplicamos entonces el Criterio de Raabe

$$\begin{aligned} \beta = \lim_{n\to\infty} n\Big(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| - 1\Big) &= \lim_{n\to\infty} n\Big(\frac{2n+2}{2n+3} - 1\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{2n+3} = -\frac{1}{2} < 1, \end{aligned}$$

con lo que la serie es divergente.

Ejercicio 5 —`10 puntos: 5 puntos cada apartado`—

1 Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ en el origen.

La ecuación de la recta tangente es:

$$\mathbf{y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Longrightarrow y = f'(0)x.}$$

Calculamos (mediante la definición de derivada):

$$\mathbf{f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}.}$$

Se trata de una indeterminación del tipo 0/0 que resolvemos aplicando la regla de L'Hôpital dos veces para llegar a que:

$$\mathbf{f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.}$$

La recta buscada es entonces $\mathbf{y = \frac{1}{2}x}$.

2 Sea $f(x) = \operatorname{cotan}(x) = \dfrac{1}{\tan(x)}$. Demuestra que $f'(x) = -1 - \operatorname{cotan}^2(x)$ y utiliza la regla de la cadena para calcular la derivada de su función inversa $g(x) = \operatorname{acotan}(x)$.

Aplicando simplemente la regla de derivación del cociente tenemos:

$$\mathbf{f'(x) = \left(\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\right)' = \frac{-\operatorname{sen}^2(x) - \cos^2(x)}{\operatorname{sen}^2(x)} = -1 - \operatorname{cotan}^2(x).}$$

Para la segunda parte como $\mathbf{g(x) = \operatorname{acotan}(x)}$ entonces

$$\mathbf{\operatorname{cotan}\big(g(x)\big) = x}$$

Aplicando entonces la regla de la cadena, junto con la derivada de la función cotangente obtenida arriba tenemos:

$$\mathbf{\left(-1 - \operatorname{cotan}^2\big(g(x)\big)\right) g'(x) = 1,}$$

y despejando

$$\mathbf{g'(x) = \frac{1}{-1 - \operatorname{cotan}^2\big(g(x)\big)} = \frac{-1}{1 + x^2}.}$$