ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIEROS INDUSTRIALES VALENCIA

# Primer Parcial de Matemáticas II
# Grado Ingeniería Biomédica

ETSII de València. Marzo de 2018

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

| Apellidos | Nombre |
|---|---|
| | |

**Instrucciones**

1. Comienza poniendo el nombre y apellidos.
2. En la pregunta de Verdadero o Falso marca claramente tu respuesta. En otro caso la pregunta no será puntuada.
3. Excepto en la primera pregunta pon todos los cálculos necesarios.
4. No se puede usar ningún tipo de material de consulta ni asistentes electrónicos.
5. Escribe con bolígrafo azul o negro.
6. El tiempo total es de 2 horas.

**Nota final**

**Puntuación**

| | | |
|---|---|---|
| **Ejercicio 1** | 1 | ______ |
| | 2 | ______ |
| **Ejercicio 2** | | ______ |
| **Ejercicio 3** | | ______ |
| **Ejercicio 4** | 1 | ______ |
| | 2 | ______ |
| **Ejercicio 5** | 1 | ______ |
| | 2 | ______ |

**Ejercicio 1** —`10 puntos: 5 puntos cada apartado`—

**1** *Indica si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas (no hay que justificar nada).*

`Pregunta correcta: 0.5 puntos   Pregunta incorrecta: -0.25 puntos   Pregunta en blanco: 0 puntos`

| | |
|---|---|
| V / **F** | *La función* $f(x) = 2^{-x}$ *es estrictamente creciente.* |
| **V** / F | *Si* $P$ *y* $Q$ *son polinomios no constantes entonces* $\sum_n \frac{\log(P(n))}{\log(Q(n))}$ *es divergente.* |
| V / **F** | *Si* $[\log(x)] = 1$ *entonces* $1 \leq x < 2$. |
| **V** / F | *La función* $f(x) = \lvert x^3 \rvert$ *es derivable en* $a = 0$. |
| V / **F** | $\lim_{n\to\infty} \frac{n + \sqrt{n^2+2}}{n - \sqrt{n}} = 1$. |
| **V** / F | $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$. |
| **V** / F | *La función* $f(x) = \cos(x\lvert x\rvert^3) + x^2$ *es una función par.* |
| **V** / F | *Si* $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 1$ *entonces* $\sum_n a_n$ *es convergente.* |
| **V** / F | $\lim_{x\to-\infty} \frac{5^x + 3x}{3^x + 5x} = \frac{3}{5}$. |
| **V** / F | *Si* $f$ *es una función continua en un punto* $a$ *entonces* $\lvert f \rvert$ *también lo es.* |

**2** *Para demostrar que toda serie numérica absolutamente convergente es convergente aplicamos el criterio de* $\boxed{\text{comparación}}$ *que afirma que si* $0 \leq a_n \leq b_n$ *y la serie* $\boxed{\sum_n b_n}$ *es convergente entonces la serie* $\boxed{\sum_n a_n}$ *también lo es.*

*Veamos entonces que si* $\sum_n a_n$ *es absolutamente convergente entonces* $\sum_n a_n$ *es convergente. Como* $\sum_n a_n$ *es absolutamente convergente entonces, por definición, la serie*

$$\boxed{\sum_n \lvert a_n \rvert}$$

*es una serie* $\boxed{\text{convergente}}$. *Usando las desigualdades*

$$0 \leq \boxed{a_n + \lvert a_n \rvert} \leq \boxed{2\lvert a_n \rvert}$$

*tenemos que la serie*

$$\boxed{\sum_n (a_n + \lvert a_n \rvert)}$$

*es también una serie convergente. Finalmente como*

$$\sum_n a_n = \boxed{\sum_n (a_n + \lvert a_n \rvert)} - \boxed{\sum_n \lvert a_n \rvert}$$

*entonces la serie* $\sum_n a_n$ *es convergente. Como queríamos demostrar.*

**Ejercicio 2** *Calcula el valor de la suma de la serie numérica* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-1)}$.

**Solución**. Se trata de una serie telescópica.
Hacemos la descomposición en fracciones simples:

$$a_n = \frac{1}{n(n^2-1)} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n} + \frac{C}{n+1} = \frac{An(n+1) + B(n-1)(n+1) + C(n-1)n}{n(n^2-1)}.$$

De donde: $1 = An(n+1) + B(n-1)(n+1) + C(n-1)n$,
y por lo tanto

$$\begin{aligned} n=-1 &\ :\ 1 = 2C \Longrightarrow C = 1/2 \\ n=0 &\ :\ 1 = -B \Longrightarrow B = -1 \\ n=1 &\ :\ 1 = 2A \Longrightarrow A = 1/2. \end{aligned}$$

De esta manera

$$a_n = \frac{1/2}{n-1} + \frac{-1}{n} + \frac{1/2}{n+1}.$$

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1/2}{1} + \frac{-1}{2} + \frac{1/2}{3} \\ a_3 &= \frac{1/2}{2} + \frac{-1}{3} + \frac{1/2}{4} \\ a_4 &= \frac{1/2}{3} + \frac{-1}{4} + \frac{1/2}{5} \\ a_6 &= \frac{1/2}{4} + \frac{-1}{5} + \frac{1/2}{6} \\ &\ \vdots \\ a_{n-2} &= \frac{1/2}{n-3} + \frac{-1}{n-2} + \frac{1/2}{n-1} \\ a_{n-1} &= \frac{1/2}{n-2} + \frac{-1}{n-1} + \frac{1/2}{n} \\ a_n &= \frac{1/2}{n-1} + \frac{-1}{n} + \frac{1/2}{n+1} \end{aligned}$$

Sumando todas las igualdades tenemos

$$a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = \frac{1/2}{1} + \frac{-1}{2} + \frac{1/2}{2} + \frac{1/2}{n} + \frac{-1}{n} + \frac{1/2}{n+1},$$

con lo que

$$\begin{aligned} \lim_n s_n &= \lim_n \left(a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n\right) \\ &= \lim_n \left(\frac{1/2}{1} + \frac{-1}{2} + \frac{1/2}{2} + \frac{1/2}{n} + \frac{-1}{n} + \frac{1/2}{n+1}\right) \\ &= \frac{1/2}{1} + \frac{-1}{2} + \frac{1/2}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Así la serie es convergente y suma $1/4$.

**Ejercicio 3** *Calcula la derivada de la función* $f(x) = \dfrac{x^2 \tan(x) \log(x)}{\sqrt{x}\ \operatorname{sen}(x)\ 3^x}$.

**Solución**. *Aplicamos la derivación logarítmica.*
*Tomando logaritmos:*

$$\begin{aligned}
\log(f(x)) &= \log \frac{x^2 \tan(x) \log(x)}{\sqrt{x}\ \operatorname{sen}(x)\ 3^x} \\
&= 2\log(x) + \log(\tan(x)) + \log(\log(x)) - \frac{1}{2}\log(x) - \log(\operatorname{sen}(x)) - x\log(3) \\
&= \frac{3}{2}\log(x) + \log(\tan(x)) + \log(\log(x)) - \log(\operatorname{sen}(x)) - x\log(3),
\end{aligned}$$

*derivando en ambas partes:*

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{3}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{\tan(x)}\frac{1}{\cos^2(x)} + \frac{1}{\log(x)}\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\cos(x) - \log(3).$$

*Despejando:*

$$f'(x) = \frac{x^2 \tan(x) \log(x)}{\sqrt{x}\ \operatorname{sen}(x)\ 3^x}\left(\frac{3}{2x} + \frac{1}{\operatorname{sen}(x)\cos(x)} + \frac{1}{x\log(x)} - \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} - \log(3)\right).$$

OTRA FORMA. *Derivar como si no hubiera vida*

*...pero no estaba pensado para hacerlo así.*

**Ejercicio 4** —`10 puntos: 5 puntos cada apartado`—

**1** *Estudia el carácter de la serie* $\sum_n \frac{5^n n^n}{2^n n!}$.

**Solución**. *Aplicamos el criterio del cociente de D'Alembert:*

$$\alpha = \lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_n \frac{5^{n+1}\ (n+1)^{n+1}\ 2^n\ n!}{5^n\ n^n\ 2^{n+1}\ (n+1)!} = \frac{5}{2}\lim_n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n.$$

*Resolvemos la indeterminación aplicando la Fórmula de Euler:*

$$\alpha = \frac{5}{2}\, e^{\lim_n (\frac{n+1}{n}-1)n} = \frac{5}{2}e.$$

*Como* $\alpha > 1$ *entonces la serie diverge.*

**2** *Estudia el carácter de la serie* $\sum_n \frac{(-1)^n}{2^n \log(n)}$.

**Solución**. *Se trata de una serie alternada. Aplicamos el criterio de Leibniz. Como las sucesiones* $(2^n)_n$ *y* $(\log n)_n$ *son crecientes entonces:*

$$b_n = \frac{1}{2^n \log(n)}$$

*es una sucesión decreciente. Y como*

$$\lim_n b_n = \lim_n \frac{1}{2^n \log(n)} = 0,$$

*entonces la serie converge por el criterio de Leibniz.*

OTRA FORMA: *Estudiamos si la serie es absolutamente convergente. Como*

$$\sum_n \left|\frac{(-1)^n}{2^n \log(n)}\right| = \sum_n \frac{1}{2^n \log(n)},$$

*el criterio del cociente de D'Alembert:*

$$\alpha = \lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_n \frac{2^n \log(n)}{2^{n+1}\log(n+1)} = \frac{1}{2}\lim_n \frac{\log(n)}{\log(n+1)} = \frac{1}{2}.$$

*Como* $\alpha < 1$ *la serie* $\sum_n |a_n|$ *es convergente. Esto significa que la serie original es absolutamente convergente y por lo tanto convergente.*

**Ejercicio 5** —10 puntos: 8 puntos el primer apartado y 2 el segundo—

1 *Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x|x| + \cos(x)$ en el origen.*

**Solución**. *La ecuación de la recta tangente a $f$ en el origen será:*

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \text{ esto es } y - 1 = f'(0)x.$$

*Calculamos entonces $f'(0)$. Como la función $y = |x|$ no es derivable en el origen no podemos usar la reglas de derivación por lo que aplicamos la definición:*

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x|x| + \cos(x) - 1}{x}.$$

*Este último límite es una indeterminación del tipo $0/0$ en el que no podemos usar la regla de l'Hôpital porque no podemos derivar el numerador (debido al módulo). Para quitar el valor absoluto hacemos los límites laterales:*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x|x| + \cos(x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 + \cos(x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x - \operatorname{sen}(x)}{1} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x|x| + \cos(x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x^2 + \cos(x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-2x - \operatorname{sen}(x)}{1} = 0.$$

*Como los límites laterales coinciden el límite existe y vale $0$. Así $f'(0) = 0$ y por lo tanto la ecuación de la recta tangente es:*

$$y = 1.$$

2 *Una escalera de 10 metros de altura está apoyada en una pared vertical al suelo. Si el extremo inferior se resbala y se aleja de la pared a una velocidad constante de 1 m/s.*

*(a) Da una formulación matemática que relacione el desplazamiento horizontal, $x = x(t)$, con el desplazamiento vertical, $y = y(t)$. ¿Cuál será el desplazamiento vertical en el instante $t_0$ en el que el extremo inferior de la escalera se haya desplazado 6 m?*

*(b) ¿A qué velocidad se deslizará el extremo superior cuando el extremo inferior de la escalera esté a 6 m de la pared?*

**Solución**. *(a) Aplicando el Teorema de Pitágoras*

$$x(t)^2 + y(t)^2 = 10^2 = 100.$$

*En el instante $t_0$ en el que el extremo inferior está a 6 m de la pared*

$$x(t_0) = 6, \quad \text{con lo que,} \quad y(t_0) = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8.$$

*(b) Para calcular las velocidades derivamos respecto de $t$:*

$$2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0, \quad \text{es decir}, \quad x(t)x'(t) + y(t)y'(t) = 0.$$

*Y como $x'(t_0) = 1$ entonces*

$$x(t_0)x'(t_0) + y(t_0)y'(t_0) = 0, \quad \text{con lo que,} \quad 6 + 8y'(t_0) = 0.$$

*Así:*

$$y'(t_0) = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}.$$