ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIEROS INDUSTRIALES VALENCIA

Primer Parcial de Matemáticas II
Grado Ingeniería Biomédica

ETSII de Valencia. Marzo de 2017

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Apellidos	Nombre

Instrucciones

1. Comienza poniendo el nombre y apellidos.
2. En la pregunta de Verdadero o Falso marca claramente tu respuesta. En otro caso la pregunta no será puntuada.
3. Excepto en la primera pregunta pon todos los cálculos necesarios.
4. No se puede usar ningún tipo de material de consulta ni asistentes electrónicos.
5. Escribe con bolígrafo azul o negro.
6. El tiempo total es de 2 horas.

Nota final

Puntuación

Ejercicio 1	1	______
	2	______
Ejercicio 2		______
Ejercicio 3		______
Ejercicio 4	1	______
	2	______
Ejercicio 5	1	______
	2	______

Ejercicio 1 —`10 puntos: 5 puntos cada apartado`—

1 *Indica si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas (no hay que justificar nada).*

`Pregunta correcta: 0.5 puntos   Pregunta incorrecta: -0.25 puntos   Pregunta en blanco: 0 puntos`

- **V** / **F** *La función* $f(x) = [e^x]$ *es derivable en* $a = -1$.
- **V** / **F** *La serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n + \sqrt{n}}$ *es convergente.*
- **V** / **F** *La ecuación* $\operatorname{sen}(x) - 2x = 0$ *tiene exactamente una solución en* $\mathbb{R}$.
- **V** / **F** *La serie armónica alternada no es absolutamente convergente.*
- **V** / **F** $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{n^n} = 0$.
- **V** / **F** *Si* $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) > 0$ *entonces la función* $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *es creciente.*
- **V** / **F** *La función* $f(x) = x|x| + \cos(x)$ *es una función par.*
- **V** / **F** *Una serie geométrica de razón* r *converge absolutamente si, y sólo si,* $|r| < 1$.
- **V** / **F** $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log(4n^5 + 7n + 1)}{\log(5n^4 + 5n + 2)} = \frac{5}{4}$.
- **V** / **F** *La ecuación de la recta tangente a* $f(x) = \log(x)$ *en* $a = 1$ *es* $y = x - 1$.

2 *El* **Criterio general de divergencia** *asegura que si una serie numérica* $\sum_n a_n$ *es* $\boxed{\text{convergente}}$ *entonces debe verificar que*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$$

Para demostrar este criterio consideramos la sucesión de las sumas parciales:

$$s_n = \boxed{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$$

que es, por hipótesis, una sucesión $\boxed{\text{convergente}}$. *Pero como*

$$s_n - s_{n-1} = \boxed{a_n}$$

entonces tomando límites se tiene el resultado.

Ejercicio 2 *Calcula* $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}\right)^{\frac{5^n-3^n}{4^n+5^n}}$.

Solución. Calculamos en primer lugar el límite de la base

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{1}+\sqrt{1}}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=1\end{aligned}$$

En segundo lugar, el límite del exponente:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-3^n}{4^n+5^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{5^n\big(1-(3/5)^n\big)}{5^n\big((4/5)^n+1\big)}=1$$

Así

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}\right)^{\frac{5^n-3^n}{4^n+5^n}}=1^1=1.$$

Ejercicio 3 *Estudia, en función del valor de $x \in \mathbb{R}$, el carácter de la serie* $\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3^2} + \frac{x^5}{3^3} + \frac{x^6}{3^4} + \dots$ *Calcula también el valor de la suma (donde sea convergente).*

Solución. Se trata de una serie geométrica:

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3^2} + \frac{x^5}{3^3} + \frac{x^6}{3^4} + \dots &= x^2\Big(\frac{x}{3} + \frac{x^2}{3^2} + \frac{x^3}{3^3} + \frac{x^4}{3^4} + \dots\Big) \\ &= x^2\Big(\frac{x}{3} + (\frac{x}{3})^2 + (\frac{x}{3})^3 + (\frac{x}{3})^4 + \dots\Big) \\ &= x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{x}{3})^n, \end{aligned}$$

de razón $r = \frac{x}{3}$ que sabemos que converge si, y sólo si,

$$|r| = \left|\frac{x}{3}\right| < 1, \text{ es decir si } |x| < 3.$$

En este caso la suma será

$$x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{x}{3})^n = x^2 \frac{(x/3)^1}{1 - (x/3)} = \frac{x^3}{3 - x}.$$

Ejercicio 4 —`10 puntos: 5 puntos cada apartado`—

Las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico se definen respectivamente mediante las fórmulas:

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

1 *Demuestra que* $\big(\mathrm{sh}(x)\big)' = \mathrm{ch}(x)$ *y que* $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.

Solución. *En primer lugar:*

$$\big(\mathrm{sh}(x)\big)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}(-1)}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x)$$

Y en segundo lugar

$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{2 - (-2)}{4} = 1.$$

2 *Utiliza las fórmulas anteriores, junto con la regla de la cadena, para calcular la derivada de la función argumento del seno hiperbólico* $g(x) = \mathrm{argsh}(x)$ *que es la función inversa del seno hiperbólico.*

Solución. *Dado que*

$$g(x) = \mathrm{argsh}(x) \iff \mathrm{sh}\big(g(x)\big) = x,$$

derivando respecto de x *y usando que* $\big(\mathrm{sh}(x)\big)' = \mathrm{ch}(x)$ *junto con la regla de la cadena se tiene que:*

$$\mathrm{ch}\big(g(x)\big)g'(x) = 1,$$

con lo que despejando:

$$g'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}\big(g(x)\big)}.$$

Por otra parte como $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$ *entonces* $\mathrm{ch}(x) = \pm\sqrt{1 + \mathrm{sh}^2(x)}$. *Pero como* $\mathrm{ch}(x)$ *es una función positiva (por ser suma de exponenciales) nos quedamos con el signo positivo. En definitiva:*

$$\mathrm{ch}(x) = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2(x)},$$

y por lo tanto:

$$g'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}\big(g(x)\big)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{sh}^2\big(g(x)\big)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Ejercicio 5 —`10 puntos: 5 puntos cada apartado`—

1 *Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x|x| + e^x$ en el origen.*

Solución. *La ecuación de la recta tangente a f en el origen será:*

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \text{ esto es } y - 1 = f'(0)x.$$

Calculamos entonces $f'(0)$. Como la función $y = |x|$ no es derivable en el origen no podemos usar la reglas de derivación por lo que aplicamos la definición:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x|x| + e^x - 1}{x}.$$

Este último límite es una indeterminación del tipo $0/0$ en el que no podemos usar la regla de l'Hôpital porque no podemos derivar el numerador (debido al módulo). Para quitar el valor absoluto hacemos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x|x| + e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 + e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x + e^x}{1} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x|x| + e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x^2 + e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x + e^x}{1} = 1.$$

Como los límites laterales coinciden el límite existe y vale 1. Así $f'(0) = 1$ y por lo tanto la ecuación de la recta tangente es:

$$y = x + 1.$$

2 *Calcula dos números cuya suma sea 100 y de forma que su producto sea máximo.*

Solución. *Sean x e y los números buscados. Se trata de maximizar la función producto*

$$P(x, y) = xy.$$

Pero como $x + y = 100$ entonces $y = 100 - x$ con lo que se trata de maximizar

$$P(x) = x(100 - x) = 100x - x^2.$$

Para ello calculamos los puntos críticos:

$$P'(x) = 100 - 2x = 0 \iff x = 50,$$

que se trata de un máximo porque

$$P''(50) = -2 < 0.$$

En definitiva los número buscados son $x = 50$ e $y = 100 - x = 50$.