$\mathbb{S}5$ Propuestos Semana 5

Ejercicio 42. Las funciones $|x|$ y $e^{|x-1|}$ son continuas en $\mathbb{R}$ y como la función exponencial nunca se anula entonces f es continua en $\mathbb{R}$. Sin embargo estas funciones tienen problemas de derivabilidad en $x = 0$ y $x = 1$. En $a = 0$ f no es derivable porque las derivadas laterales son distintas:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^{x-1}} = e, \quad f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{e^{x-1}} = e.$$

Análogamente en $a = 1$:

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x/e^{x-1} - 1}{x-1} = 0, \quad f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x/e^{-x+1} - 1}{x-1} = 2.$$

Ejercicio 43. La función $x^3 \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ luego f es continua y derivable en $\mathbb{R}$ salvo quizás en $a = 0$. Como además

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^3 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) = 0 = f(0), \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) = 0 < \infty,$$

entonces f es también continua y derivable en $a = 0$ y además

$$g(x) = f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) - x\cos(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Para la derivada segunda, de nuevo el único punto conflictivo es $a = 0$. De nuevo $\lim_{x\to 0} g(x) = 0 = g(0)$ con lo que $g = f'$ es continua en $a = 0$. Sin embargo

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} 3x \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}) \text{ no existe },$$

luego $g = f'$ no es derivable en $a = 0$.

Ejercicio 44. Comprueba que $\left(f(x)^{g(x)}\right)' = f(x)^{g(x)} \log(f(x)) g'(x) + g(x) f(x)^{g(x)-1} f'(x)$.

Ejercicio 47. La primera derivada sería: $x + 3y + 3xy' + yy' = 0$. Derivando de nuevo esta expresión y despejando:

$$y'' = -\frac{1 + 6y' + (y')^2}{3x + y}.$$

Ejercicio 50. Tal cual está enunciado bastaría con aplicar Bolzano a la función $f(x) = 2x^7 - 1 + x$ en $[0, 1]$. En realidad la ecuación no sólo tiene solución en $[0, 1]$ sino que es su única solución real. Para ello basta ver que como $f'(x) = 14x^6 + 1 > 0$ entonces f es creciente con lo que como máximo puede tener una solución real. Y por Bolzano sabemos que tiene al menos una con lo que la ecuación tiene una única solución real que además está en $[0, 1]$.