§6 Propuestos Semana 6

Ejercicio 51. a) Aplica l'Hôpital directamente para llegar a que el límite es $-1/2$. b) Aplica primero logaritmos (para reducir la indeterminación ∞^0) y luego l'Hôpital (tres veces si lo necesitas, aunque con una es suficiente) para tener que el límite es e (recuerda deshacer el logaritmo). c) Pasa la raíz al denominador como $x^{-1/2}$ para llegar, por l'Hôpital, a que el límite es 0.

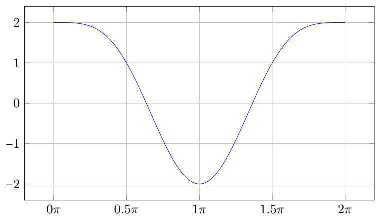
Ejercicio 54. La función es continua y derivable en $\mathbb{R}$. Como es periódica de periodo 2π basta con que la dibujemos en un intervalo de dicha amplitud, por ejemplo e $[0, 2\pi]$. Además $f(0) = f(2\pi) = 2$. Por otra parte como

$$f'(x) = -2\,\text{sen}(x) + 2\,\text{sen}(x)\cos(x) = 2\,\text{sen}(x)\big(\cos(x) - 1\big),$$

entonces los puntos críticos de f se tienen donde $\text{sen}(x) = 0$ y donde $\cos(x) = 1$. Esto es, en los puntos del conjunto $\{0, \pi, 2\pi\}$. Como además

$$f''(x) = 2\cos^2(x) - 2\,\text{sen}^2(x) - 2\cos(x),$$

tenemos que $f''(\pi) = 4 > 0$ es un mínimo.
Como $f''(0) = f''(2\pi) = 0$ no podemos afirmar nada. Pero como la función $f(x)$ está siempre entre -2 y 2 y $f(0) = f(2\pi) = 2$ entonces ha de ser un máximo.



Ejercicio 55. En el enunciado faltaría poner que el área del sector es fija A.
Si no conoces el área y la longitud de arco de un sector circular de amplitud θ y radio r las puedes obtener mediante una regla de tres (conociendo el área de un círculo, que es πr^2, y la longitud de una circunferencia, que es $2\pi r$, ya que estas se corresponderían a una amplitud de sector 2π). Así

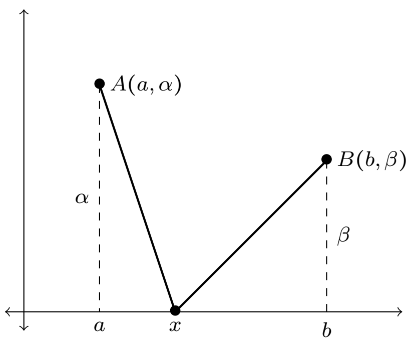
$$\text{Longitud:}\quad \begin{array}{ccc} 2\pi & \longrightarrow & 2\pi r \\ \theta & \longrightarrow & x \end{array} \quad \text{de donde } x = r\theta \qquad \text{Área:}\quad \begin{array}{ccc} 2\pi & \longrightarrow & \pi r^2 \\ \theta & \longrightarrow & x \end{array} \quad \text{de donde } x = \frac{r^2\theta}{2}.$$

Así pues la función a minimizar es el perímetro que sería $f(r,\theta) = 2r + r\theta$ con la restricción de que el área sea $\dfrac{r^2\theta}{2} = A$ y por tanto $r\theta = \dfrac{2A}{r}$. Sustituyendo la función a optimizar es:

$$f(r) = 2r + \frac{2A}{r} \Longrightarrow f'(r) = 2 - \frac{2A}{r^2} = 0 \Longrightarrow r_0 = \sqrt{A},$$

y como $f''(r_0) > 0$ se trata de un máximo. Así el sector será de radio $\sqrt{A}$ y amplitud 2 (que no depende del área A y por eso no sería necesario fijarlo en el inicio).

Ejercicio 56. Sea $A(a,\alpha)$, $B(b,\beta)$ y sea x el punto de corte con el eje de abcisa. Supongamos también que $a < b$. Claramente para que el camino sea más corto x tiene que está entre a y b.



Aplicando el teorema de Pitágoras se trata de minimizar la función:

$$f(x) = \sqrt{(x-a)^2 + \alpha^2} + \sqrt{(b-x)^2 + \beta^2},$$

cuya derivada es:

$$f'(x) = \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + \alpha^2}} - \frac{b-x}{\sqrt{(b-x)^2 + \beta^2}},$$

que igualando a cero (y elevando al cuadrado) proporciona la igualdad:

$$\frac{(x-a)^2}{(x-a)^2 + \alpha^2} = \frac{(b-x)^2}{(b-x)^2 + \beta^2} \Longrightarrow \frac{x-a}{b-x} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

La igualdad anterior proporciona como punto crítico $x_0 = \dfrac{a + (\alpha/\beta)b}{1 + (\alpha/\beta)}$ y como:

$$f''(x) = \frac{\alpha^2}{\big((x-a)^2 + \alpha^2\big)\sqrt{(x-a)^2 + \alpha^2}} + \frac{\beta^2}{\big((b-x)^2 + \beta^2\big)\sqrt{(b-x)^2 + \beta^2}},$$

en particular $f''(x_0) > 0$ y se trata de un mínimo.
Nota Si $\beta = 0$ entonces x_0 no está definido. Pero en este caso B está en el eje de abcisas y por lo tanto ese sería el punto de corte (yendo en este caso de A a B en línea recta).

Ejercicio 57. Lo que queremos saber es cuando la cantidad x (en euros) que podemos incrementar los 80 euros de renta mensual para maximizar el beneficio. De esta manera el precio del alquiler sería $80 + x$ y nuestro beneficio (por cada casa debido a los 8 euros de gastos) sería de $80 + x - 8$. El beneficio total será el producto $80 + x - 8$ por el número de casas que será $100 - x/4$. Así

$$f(x) = \left(100 - \frac{x}{4}\right)(80 + x - 8) = 7200 + 82x - \frac{x^2}{2} \Longrightarrow f'(x) = 82 - \frac{x}{2}.$$

lo que da como punto crítico $x_0 = 164$ que es claramente un máximo.

Nota ☹

Lo que acabamos de probar es que si en lugar de alquilar las 100 casas a 80 euros al mes las alquilamos a $80 + 164 = 244$ euros al mes entonces alquilaremos sólo $100 - 164/4 = 59$ casas (quedando 41 casas vacías) pero nuestro beneficio será máximo.

☹ ☹