S7 Propuestos Semana 7

Ejercicio 1. Simplemente aplica la Fórmula de Taylor a la función $p(x)$ con centro $a = -2$ hasta grado $n = 4$ (fíjate que como $p(x)$ es un polinomio de grado cuatro las derivadas de $p(x)$ de orden mayor o igual que cinco son nulas) para llegar a que

$$p(x) = -14 + (x+2) + 5(x+2)^2 - 7(x+2)^5 + 3(x+2)^4.$$

Ejercicio 3. La aproximación lineal de $f(x)$ centrada en $a = 1$ será $L(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = 2 + \sqrt{2}(x-1)$ y por lo tanto $f(1.1) \approx L(1.1) = 2 + 0.1\sqrt{2}$.
Para saber si el valor real es menor o mayor que nuestra aproximación veamos el resto. Como $f(x) = L(x) + R_1(x)$ y sabemos que el resto de Lagrange es de la forma

$$R_1(1.1) = \frac{f''(z)}{2!}(0.1)^2 = \frac{z^2}{2\sqrt{z^3+1}}(0.1)^2 > 0,$$

para z entre $a = 1$ y $x = 1.1$ entonces $f(1.1) - L(1.1) = R_1(1.1) > 0$ y en consecuencia $f(1.1) > L(1.1)$. En definitiva nuestra aproximación es menor que el valor real.

Ejercicio 5. a) Utilizando el desarrollo de la serie geométrica

$$\frac{1}{x^2-1} = -\frac{1}{1-x^2} = -\big(1 + (x^2) + (x^2)^2 + (x^2)^3 + (x^2)^4 + \dots\big) = \big(-1 - x^2 - x^4 - x^6 - x^8 + \dots\big),$$

de donde:

$$\frac{3x-1}{x^2-1} = (3x-1)\big(-1-x^2-x^4-x^6-x^8+\dots\big) = \big(-3x-3x^3-3x^5-x^7-3x^9-\dots+1+x^2+x^4+x^6+x^8+\dots\big).$$

En definitiva

$$P_n(x) = 1 - 3x + x^2 - 3x + \dots + x^n \text{ si } n \text{ es par y } P_n(x) = 1 - 3x + x^2 - 3x + \dots - 3x^n \text{ si } n \text{ es impar.}$$

b) Utilizando el desarrollo de la binomial con $p = -2$:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \big(1+(-x)\big)^{-2} = (1-2)^{-2} = \binom{-2}{0} + \binom{-2}{1}(-x) + \binom{-2}{2}(-x)^2 + \binom{-2}{3}(-x)^3 + \binom{-2}{4}(-x)^4 + \dots$$

pero fíjate que

$$\binom{-2}{n} = \frac{(-2)(2-1)(-2-2)(-2-3)\dots(-2-n+1)}{n!} = (-1)^n\frac{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdots(n+1)}{n!} = (-1)^n(n+1),$$

con lo que

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \big(1+(-x)\big)^{-2} = (1-2)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots$$

Luego

$$\begin{aligned}\frac{x(1+x)}{(1-x)^2} &= (x+x^2)\big(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\dots\big)\\ &= x+2x^2+3x^3+4x^4-5x^5+\dots+x^2+2x^3+3x^4+4x^5+5x^6+\dots\\ &= x+3x^2+5x^3+7x^4+9x^5+11x^6+\dots\end{aligned}$$

En definitiva $P_n(x) = x + 3x^2 + 5x^3 + \dots + (2n-1)x^n$.

c) Aplicamos de nuevo la binomial (ahora con $p = 1/3$):

$$\sqrt[3]{2-x} = \sqrt[3]{2}\Big(1+\big(\frac{-x}{2}\big)\Big)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}\Big(\binom{1/3}{0} + \binom{1/3}{1}\big(\frac{-x}{2}\big) + \binom{1/3}{2}\big(\frac{-x}{2}\big)^2 + \binom{1/3}{3}\big(\frac{-x}{2}\big)^3 + \binom{1/3}{4}\big(\frac{-x}{2}\big)^4 + \dots\Big)$$

y como en este caso

$$\binom{1/3}{n} = \frac{(\frac{1}{3})(\frac{1}{3}-1)(-\frac{1}{3}-2)(-\frac{1}{3}-3)\dots(-\frac{1}{3}-n+1)}{n!} = (-1)^{n-1}\frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-4)}{3^n n!},$$

entonces

$$\big(-\frac{x}{2}\big)^n\binom{1/3}{n} = \frac{(-1)^n x^n}{2^n}(-1)^{n-1}\frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-4)}{3^n n!} = -\frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-4)}{6^n n!}x^n$$

con lo que $P_n(x) = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2}\frac{x}{6} - \dots - \sqrt[3]{2}\frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-4)}{6^n n!}x^n$.

Ejercicio 7. a) El radio de convergencia será

$$R = \Big(\lim_n \frac{3^{n+1}(n+1)+1}{3^n n+1}\Big)^{-1} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \left(\lim_n \frac{3^n n\big(3\frac{n+1}{n}+\frac{1}{3^n n}\big)}{3^n n\big(1+\frac{1}{3^n n}\big)}\right)^{-1} = 3^{-1} = \frac{1}{3}.$$

De esta manera la SP converge al menos en el intervalo $\big(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\big)$. Queda ver qué pasa en los extremos:

- $\boxed{x=\frac{1}{3}}$ La serie numérica $\sum_n (3^n n+1)\big(\frac{1}{3}\big)^n = \sum_n \big(n+\frac{1}{3^n}\big)$ es divergente por el criterio general de divergencia (el término general no tiende a cero, de hecho tiende a ∞).
- $\boxed{x=-\frac{1}{3}}$ La serie numérica $\sum_n (3^n n+1)\big(-\frac{1}{3}\big)^n = \sum_n \big(n+\frac{1}{3^n}\big)(-1)^n$ es también divergente por el criterio general de divergencia (el término general no tiende a cero, aunque en este caso no existe).

En definitiva el dominio de convergencia es $D = \big(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\big)$.

b) El radio de convergencia es en este caso

$$R = \Big(\lim_n \sqrt[n]{(\sqrt{n})^n}\Big)^{-1} = \Big(\lim_n \sqrt{n}\Big)^{-1} = \infty^{-1} = 0,$$

con lo que la serie converge solo en el centro $D=\{0\}$.

c) El radio de convergencia es:

$$R = \Big(\lim_n \sqrt[n]{q^{n^2}}\Big)^{-1} = \Big(\lim_n q^n\Big)^{-1} = 0^{-1} = \infty,$$

y por lo tanto en esta caso la SP converge en todo $\mathbb{R}$.

Ejercicio 9. Para el radio de convergencia

$$R = \Big(\lim_n \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}\Big)^{-1} = 4,$$

con lo que la SP converge al menos en $(-4,4)$.

El estudio en los extremos es quizás un poco difícil pero allá vamos.

☹ ☹

- $\boxed{x=4}$ Aplicamos el criterio de Raabe a la serie $\sum_n \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$ (fíjate que si aplicamos el criterio de D'Alembert nos saldrá siempre uno):

$$\lim_n \Big(\frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} - 1\Big)n = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} < 1,$$

y tenemos que diverge.

- $\boxed{x=-4}$ Tenemos que estudiar ahora la serie $\sum_n (-1)^n \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$. Como se trata de una serie alternada pensamos en aplicar el Criterio de Leibnitz para lo que tendríamos que probar que la sucesión $b_n = \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$ es decreciente y tiene límite nulo. Pero como

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{2(n+1)}{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+1} > 1,$$

entonces (b_n) es creciente (no podemos aplicar Leibniz ☹). Pero si una sucesión es creciente y de términos positivos no puede tener límite nulo. Esto significa que $\lim_n (-1)^n b_n$ no existirá y en particular no será cero y, por el criterio general de la divergencia la serie diverge también en este extremo ☺).