S8 Propuestos Semana 8

Ejercicio 11. a) Aplica la fórmula del cociente para obtener que $R = 1/3$ y demuestra que converge en $x = 1/3$ por ser una serie armónica generalizada con índice $\alpha = 1/2 < 1$ y que converge en el otro extremo $x = -1/3$ aplicando el criterio de Leibniz. En definitiva el dominio de convergencia es $D = [-1/3, 1/3)$.
b) En este caso es mejor la fórmula de la raíz para probar que $R = 0^{-1} = \infty$ y por lo tanto converge en $\mathbb{R}$.
c) Aplica aquí la fórmula del cociente para obtener que $R = 3$ y comprueba que en los dos extremos diverge por el Criterio general de la divergencia (en $x = 3$ el término general tiende a ∞ y en $x = -3$ no existe).
d) De nuevo mediante la fórmula del cociente demuestra que $R = 1/e$ (para ello puedes usar la fórmula de Euler). En el extremo derecho (que en este caso es $x = -1/2+1/e$ porque la serie de potencias está centrada en $x = -1/2$ demuestra que es convergente utilizando el criterio de Raabe. En el otro extremo se tiene una serie alternada que sale absolutamente convergente (por ser la misma que has estudiado en el extremo derecho) y por tanto convergente. En definitiva en este caso $D = [-1/2 - 1/e, -1/2 + 1/e]$.
e) Mediante la fórmula del cociente prueba que $R = \infty$ y la serie de potencias converge entonces en todo $\mathbb{R}$.

Ejercicio 13. Se trata en ambos casos de dos series de términos no consecutivos y en primer lugar habrá que arraglarlas para poder aplicar la fórmula.
a) Como $\sum \frac{n^2}{2^n} x^{3n-1} = x^{-1} \sum \frac{n^2}{2^n}(x^3)^n$ llamando $y = x^3$ estudiamos la serie $\sum \frac{n^2}{2^n} y^n$. Comprueba que el radio de convergencia es $R_y = 2$ con lo que esta serie converge al menos si $y \in (-2, 2)$ y como $y = x^3$ tendríamos que la serie convergería si $|x^3| < 2$ o lo que es lo mismo si $|x| < \sqrt[3]{2}$. En otras palabras $R = \sqrt[3]{2}$ la serie de potencias original convergerá al menos en el intervalo $(-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$. Demuestra finalmente que en ambos extremos la serie es divergente mediante el criterio general de la divergencia.
b) Análogamente como ahora $\sum \frac{1}{25^n n} x^{2n} = \sum \frac{1}{25^n n} y^n$ con $y = x^2$ comprueba que mediante el criterio del cociente $R_y = 5$ y por tanto $R = \sqrt{5}$. En este caso comprueba que la serie diverge en el extremo derecho $x = 5$ por ser la serie armónica pero converge en el izquierdo por ser la armónica alternada. En definitiva la serie de potencias converge en $D = [-\sqrt{5}, \sqrt{5})$.

Ejercicio 15. Se trata de un ejercicio muy similar al **Ejercicio 5**. En realidad allí pedían los polinomios de MacLaurin y aquí el desarrollo.
a) Usamos el desarrollo de la serie geométrica

$$\frac{1}{x^3 - 1} = -\frac{1}{1 - x^3} = -\big(1 + (x^3) + (x^3)^2 + (x^3)^3 + (x^3)^4 + \dots\big) = \big(-1 - x^3 - x^6 - x^9 - x^{12} + \dots\big), \text{ si } |x^3| < 1$$

de donde:

$$\frac{5x - 1}{x^3 - 1} = (5x-1)\big(-1-x^3-x^6-x^9-x^{12}+\dots\big) = \big(-5x-5x^4-5x^7-5x^{10}-5x^{13}+\dots+1+x^3+x^6+x^9+x^{12}+\dots\big).$$

En definitiva

$$\frac{5x - 1}{x^3 - 1} = 1 - 5x + x^3 - 5x^4 + x^6 - 5x^7 + x^9 - 5x^{10} + \dots \text{ si } |x| < 1.$$

b) Este es exactamente el mismo (sólo queda indicar el radio de convergencia). La serie será

$$\frac{x(1 + x)}{(1 - x)^2} = x + 3x^2 + 5x^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (2n - 1)x^n \text{ si } |-x| = |x| < 1.$$

c) Aplicamos de nuevo la binomial (ahora con $p = 1/5$):

$$\sqrt[5]{2 - 5x} = \sqrt[5]{2}\left(1 + \left(\frac{-5x}{2}\right)\right)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{2}\left(\binom{1/5}{0} + \binom{1/5}{1}\left(\frac{-5x}{2}\right) + \binom{1/5}{2}\left(\frac{-5x}{2}\right)^2 + \binom{1/5}{3}\left(\frac{-5x}{2}\right)^3 + \binom{1/5}{4}\left(\frac{-5x}{2}\right)^4 + \dots\right)$$

y como en este caso

$$\binom{1/5}{n} = \frac{(\frac{1}{5})(\frac{1}{5} - 1)(\frac{1}{5} - 2)(\frac{1}{5} - 3)\dots(\frac{1}{5} - n + 1)}{n!} = (-1)^{n-1}\frac{4 \cdot 9 \cdot 14 \cdots (5n - 6)}{5^n n!},$$

entonces

$$\left(-\frac{5x}{2}\right)^n \binom{1/5}{n} = \frac{(-1)^n 5^n x^n}{2^n}(-1)^{n-1}\frac{4 \cdot 9 \cdot 14 \cdots (5n - 6)}{5^n n!} = -\frac{4 \cdot 9 \cdot 14 \cdots (5n - 6)}{2^n n!} x^n$$

con lo que $\sqrt[5]{2 - 5x} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{4 \cdot 9 \cdot 14 \cdots (5n - 6)}{2^{n-1/5} n!} x^n$. Además las serie convergerá si $\left|\frac{-5x}{2}\right| < 1$ esto es si $|x| < \frac{2}{5} = R$.

Ejercicio 17. La derivada de la función es una serie de tipo binomial (con $p = -1/2$):

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} = 2x\big(1+(-x^4)\big)^{-1/2}.$$

Como

$$\big(1+(-x^4)\big)^{-1/2} = \binom{-1/2}{0} + \binom{-1/2}{1}(-x^4) + \binom{-1/2}{2}(-x^4)^2 + \binom{-1/2}{3}(-x^4)^3 + \binom{-1/2}{4}(-x^4)^4 + \dots\big)$$

y como en este caso

$$\binom{-1/2}{n} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)(-\frac{1}{2}-3)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = (-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^n n!},$$

entonces

$$\big(-x^4\big)^n\binom{-1/2}{n} = (-1)^n x^{4n}(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^n n!} = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^n n!}x^{4n}$$

De esta manera:

$$f'(x) = 2x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^n n!}x^{4n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^{n-1} n!}x^{4n+1},$$

e integrando

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^{n-1} n!}\frac{x^{4n+2}}{4n+2} + C = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^{n}(n+1)!}x^{4n+2}}_{S(x)} + C,$$

y sustituyendo en $x = 0$ tenemos que $f(0) = S(0) + C$ luego $C = f(0) - S(0) = \text{asen}(0) - 0 = 0$.
Para calcular el radio de convergencia observa simplemente que la binomial converge si $|-x^4| < 1$, es decir si $|x| < 1$ y por tanto $R = 1$.

Ejercicio 19. Los dos primeros apartados son similares al **Problema 16** de la S4.
a) La serie es de tipo geométrica pero tenemos un factor $n+1$. Lo que hacemos entonces es derivar la serie geométrica. En general observa que si $|x| < 1$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots,$$

luego derivando

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

En nuestro caso

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\Big(\frac{1}{3}\Big)^n \overset{x=\frac{1}{3}}{=} \frac{1}{(1-1/3)^2} - \underbrace{1}_{n=0} = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}.$$

b) La serie es de tipo geométrica pero tenemos un $n+1$ dividiendo. Lo que hacemos entonces es integrar la serie geométrica. En general observa que si $|x| < 1$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots,$$

luego derivando

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}}_{S(x)} + C.$$

Como hemos hecho ya antes sustituyendo en $x = 0$ calculamos la constante pues: $C = f(0) - S(0) = 0$. En otras palabras:

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Como en nuestro caso

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-n}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2})^n}{n+1} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2})^{n+1}}{n+1} \overset{x=\frac{1}{2}}{=} 2\Big(-\log\Big(1-\frac{1}{2}\Big) - \underbrace{\frac{1}{2}}_{n=0}\Big) = 2\log 2 - 1.$$

c) En este caso también tenemos un $n+2$ multiplicando y podríamos obtener la serie mediante derivación (pero ahora de la serie de la exponencial porque tenemos abajo un factorial). Otra forma de hacerlo en este caso sería intentar simplificar las n del numerador con los factoriales del denominador. Esta técnica funciona en general cuando hay factoriales en el denominador.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)!}(-2)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)+1}{(n+1)!}(-2)^{n+1} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)!}(-2)^{n+1}}_{S_1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(-2)^{n+1}}_{S_2}$$

Para ambas series recuerda que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{S_1}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)!}(-2)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{n!} = (-2)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$.

Esta serie es la exponencial con $x=-2$ pero empezando a sumar en $n=1$ con lo que

$$S_1 = -2\big(e^{-2} - \underbrace{1}_{n=0}\big) = -2e^{-2} + 2.$$

$\boxed{S_2}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(-2)^{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$.

También es la serie exponencial con $x=-2$ pero empezando a sumar en $n=2$ con lo que

$$S_2 = e^{-2} - \underbrace{1}_{n=0} - \underbrace{(-2)}_{n=1} = e^{-2} + 1.$$

En definitiva $S = S_1 + S_2 = 3 - e^{-2}$.

d) El procedimiento es similar al anterior.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!}}_{S_1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}}_{S_2}.$$

$\boxed{S_1}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ que es la serie exponencial con $x=1$ luego $S_1 = e^1 = e$.

$\boxed{S_2}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ es ahora la serie exponencial (con $x=1$ también) excepto el primer término luego $S_2 = e-1$.

En definitiva $S = S_1 + S_2 = 2e - 1$.