$\boxed{\mathbb{S}10}$ Propuestos Semana 10

Ejercicio 31. Se trata de dos paraboloides que se cortan a la altura del plano $z = 4$. Lo que hacemos es calcular, por secciones, el volumen de cada paraboloide y sumarlos:

$\boxed{V_1}$ Volumen del paraboloide $z = x^2 + y^2$ entre los planos $z = 0$ y $z = 4$.

Cuando cortamos el paraboloide con el plano $z = z_0$ tenemos $x^2 + y^2 = z_0$ que es una circunferencia de centro $(0,0)$ y de radio $\sqrt{z_0}$. Esta circunferencia tendrá como área $A(z_0) = \pi(\sqrt{z_0})^2 = \pi z_0$ con lo que

$$V_1 = \int_0^4 A(z)dz = \pi \int_0^4 zdz = \pi \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^4 = 8\pi$$

$\boxed{V_2}$ Volumen del paraboloide $z = 8 - x^2 - y^2$ entre los planos $z = 4$ y $z = 8$.

Cuando cortamos el paraboloide con el plano $z = z_0$ tenemos $x^2 + y^2 = 8 - z_0$ que es una circunferencia de centro $(0,0)$ y de radio $\sqrt{8 - z_0}$. Esta circunferencia tendrá como área $A(z_0) = \pi(\sqrt{8 - z_0})^2 = \pi(8 - z_0)$ con lo que

$$V_1 = \int_4^8 A(z)dz = \pi \int_4^8 (8 - z)dz = \pi \left[\frac{(8 - z)^2}{-2}\right]_4^8 = 8\pi$$

Así el volumen será $V = V_1 + V_2 = 16\pi$.

Ejercicio 33. Aplicamos la fórmula de cálculo de la longitud de una curva:

a) Para la integral haz el cambio $t = \operatorname{sen}(x)$ y luego haciendo la descomposición en fracciones simples:

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1 + \left(\frac{-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\right)^2} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos(x)} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos(x)dx}{1 - \operatorname{sen}^2(x)} = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dt}{1 - t^2} = \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{2} + 2}{\sqrt{2} - 2}$$

b) La integral se hace mediante el cambio $t^2 = 1 + \frac{9}{4}x$ con el que $2tdt = \frac{9}{4}dx$:

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (\tfrac{3}{2}\sqrt{x})^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \tfrac{9}{4}x} dx = \int_1^{\frac{\sqrt{13}}{2}} \sqrt{t^2}\, \tfrac{4}{9}\, 2t\ dt = \frac{8}{9} \int_1^{\frac{\sqrt{13}}{2}} t^2\ dt = \frac{8}{9}\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^{\sqrt{13}/2} = \frac{8}{27}\left(\frac{13\sqrt{13}}{8} - 1\right)$$

c) Es similar al anterior. Haz el cambio $t^2 = 1 + 36x$ con el que $2t\ dt = 36dx$:

$$\int_0^1 \sqrt{1 + (6\sqrt{x})^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 36x} dx = \int_1^{\sqrt{37}} t \tfrac{1}{18} t dt = \frac{1}{18}\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^{\sqrt{37}} = \frac{\sqrt[3]{37} - 1}{54}$$

Ejercicio 35. Un dibujo de la función módulo te ayudará a ver que hay que hacer dos casos:

$\boxed{x \le 0}$ En este caso $f(x) = |x| = -x$, luego

$$I(x) = \int_{-1}^x f(s)\, ds = \int_{-1}^x (-s)\, ds = \left[\frac{-s^2}{2}\right]_{-1}^x = -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$$

$\boxed{0 \le x \le 1}$ Ahora $f(x) = |x| = x$, luego

$$I(x) = \int_{-1}^x f(s)\, ds = \int_{-1}^0 (-s)\, ds + \int_0^x s\, ds = \frac{1}{2} + \left[\frac{s^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$$

En definitiva , $I(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} & x \le 0 \\ \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} & 0 < x \le 1 \end{cases}$, que también puede expresarse como $I(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x|x|}{2}, \quad x \in [-1, 1]$.

Ejercicio 37.

$$V = \pi \int_0^1 \left((e^x)^2 - (x^2)^2\right) dx = \pi \left[\frac{e^{2x}}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \pi\left(\frac{e^2 - 1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \pi\left(\frac{e^2}{2} - \frac{7}{10}\right)$$

Ejercicio 39. Resolvemos la indeterminación mediante la Regla de l'Hôpital y usamos el Teorema Fundamental de Cálculo (la segunda versión) para derivar la integral:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x}{x - 3} \int_3^x \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} dt \overset{0 \cdot \infty}{=} \lim_{x \to 3} \frac{x \int_3^x \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} dt}{x - 3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 3} \frac{\int_3^x \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} dt + x \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}{1} = \operatorname{sen}(3)$$