ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIEROS INDUSTRIALES VALENCIA

Primer Parcial de Matemáticas II
Grado Ingeniería Biomédica

ETSII de Valencia. Marzo de 2019

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Apellidos	Nombre

Instrucciones

1. Comienza poniendo el nombre y apellidos.
2. En la pregunta de Verdadero o Falso marca claramente tu respuesta. En otro caso la pregunta no será puntuada.
3. Excepto en la primera pregunta pon todos los cálculos necesarios.
4. No se puede usar ningún tipo de material de consulta ni asistentes electrónicos.
5. Escribe con bolígrafo azul o negro.
6. El tiempo total es de 2 horas.

Nota final

Puntuación

Ejercicio 1	1	______
	2	______
Ejercicio 2		______
Ejercicio 3		______
Ejercicio 4	1	______
	2	______
Ejercicio 5	1	______
	2	______

Ejercicio 1 —`10 puntos: 5 puntos cada apartado`—

1 *Indica si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas (no hay que justificar nada).*

`Pregunta correcta: 0.5 puntos   Pregunta incorrecta: -0.25 puntos   Pregunta en blanco: 0 puntos`

V / **F**	*La serie* $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *es absolutamente convergente.*
V / F	*La ecuación* $e^{-x} - \operatorname{atan}(x) = 0$ *tiene al menos una raíz en el intervalo* $[0,1]$
V / **F**	*Si* $[-\log(x)] = -1$ *entonces* $1 \leq x < 2$.
V / F	*La función* $f(x) = [e^x]$ *es derivable en* $]-\infty, 0[$,
V / **F**	$\lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{2n^2+2}}{n-\sqrt{n}} = 3.$
V / F	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{1}{6}.$
V / F	*La función* $f(x) = \operatorname{sen}(x\|x\|^3) + x$ *es una función impar.*
V / F	*Si* $\lim_{n\to\infty} n\sqrt{n}a_n = 1$ *entonces* $\sum_n a_n$ *es convergente.*
V / F	$\lim_{x\to+\infty} \frac{5^x+7x}{5^x+5x} = 1.$
V / **F**	*Si* f *es función derivable en un punto* a *entonces* $\|f\|$ *también lo es.*

2 *Para demostrar que toda serie numérica absolutamente convergente es convergente aplicamos el criterio de* $\boxed{\text{comparación}}$ *que afirma que si* $0 \leq a_n \leq b_n$ *y la serie* $\boxed{\sum_n b_n}$ *es convergente entonces la serie* $\boxed{\sum_n a_n}$ *también lo es.*

Veamos entonces que si $\sum_n a_n$ *es absolutamente convergente entonces* $\sum_n a_n$ *es convergente. Como* $\sum_n a_n$ *es absolutamente convergente entonces, por definición, la serie*

$$\boxed{\sum_n |a_n|}$$

es una serie $\boxed{\text{convergente}}$. *Usando las desigualdades*

$$0 \leq \boxed{a_n + |a_n|} \leq \boxed{2|a_n|}$$

tenemos que la serie

$$\boxed{\sum_n (a_n + |a_n|)}$$

es también una serie convergente. Finalmente como

$$\sum_n a_n = \boxed{\sum_n (a_n + |a_n|)} - \boxed{\sum_n |a_n|}$$

entonces la serie $\sum_n a_n$ *es convergente. Como queríamos demostrar.*

Ejercicio 2 *Calcula el valor de la suma de la serie numérica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$.

Solución. Se trata de una serie telescópica.
Hacemos la descomposición en fracciones simples:

$$a_n = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} = \frac{A(n+2)+Bn}{n(n+2)}.$$

De donde: $1 = A(n+2) + Bn$
y por lo tanto

$$\begin{aligned} n = 0 \quad &: \quad 1 = 2A \Longrightarrow A = 1/2 \\ n = -2 \quad &: \quad 1 = -2B \Longrightarrow B = -1/2. \end{aligned}$$

De esta manera

$$a_n = \frac{1/2}{n} + \frac{-1/2}{n+2}.$$

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1/2}{1} + \frac{-1/2}{3} \\ a_2 &= \frac{1/2}{2} + \frac{-1/2}{4} \\ a_3 &= \frac{1/2}{3} + \frac{-1/2}{5} \\ a_4 &= \frac{1/2}{4} + \frac{-1/2}{6} \\ a_5 &= \frac{1/2}{5} + \frac{-1/2}{7} \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= \frac{1/2}{n-1} + \frac{-1/2}{n+1} \\ a_n &= \frac{1/2}{n} + \frac{-1/2}{n+2} \end{aligned}$$

Sumando todas las igualdades tenemos

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \frac{1/2}{1} + \frac{1/2}{2} + \frac{-1/2}{n+1} + \frac{-1/2}{n+2},$$

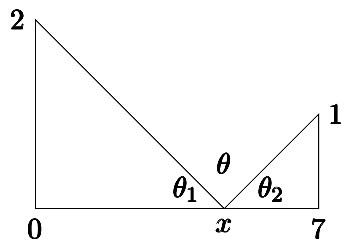
con lo que

$$\begin{aligned} \lim_n s_n &= \lim_n \left(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n\right) \\ &= \frac{1/2}{1} + \frac{1/2}{2} \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Así la serie es convergente y suma $3/4$.

Ejercicio 3 —`10 puntos: 2.5 puntos cada apartado`—

¿Donde colocarías el punto x para que el ángulo θ sea lo más grande posible?



1. *Calcula primero el valor de $\tan(\theta_1)$ y de $\tan(\theta_2)$ en función de x.*

2. *Ten en cuenta que $\theta_1+\theta_2+\theta=\pi$ y la fórmula*

$$\tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{\tan(\theta_1)+\tan(\theta_2)}{1-\tan(\theta_1)\tan(\theta_2)},$$

para demostrar que $\theta(x)=\operatorname{atan}(\frac{14-x}{x^2-7x+2})$.

3. *Explica por qué para calcular el máximo de $\theta(x)$ es suficiente con calcular el máximo de*

$$\phi(x)=\frac{14-x}{x^2-7x+2}.$$

4. *Calcula finalmente el máximo de $\phi(x)$ (no hace falta que compruebes que se trata de un máximo).*

Solución. *Aplicando trigonometría tenemos que* $\tan(\theta_1)=\frac{2}{x}$ *y* $\tan(\theta_2)=\frac{1}{7-x}$ *con lo que aplicando la fórmula tenemos que:*

$$\tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{7-x}}{1-\frac{2}{x}\frac{1}{7-x}}=\frac{14-x}{-x^2+7x-2}.$$

Pero como $\tan(\theta_1+\theta_2)=\tan(\pi-\theta)=-\tan(\theta)$ *entonces*

$$-\tan(\theta)=\frac{14-x}{-x^2+7x-2}\quad\Longrightarrow\quad\theta(x)=\operatorname{atan}(\frac{14-x}{x^2-7x+2}).$$

Pero como la arcotangente es una función creciente el máximo de $\theta(x)=\operatorname{atan}(\phi(x))$ se dará cuando $\phi(x)$ sea máximo[a]*. Así pues se trata de calcular los extremos de la función $\phi(x)$ para lo que calculamos la derivada:*

$$\phi'(x)=\frac{(-1)(x^2-7x+2)-(14-x)(2x-7)}{(x^2-7x+2)^2}=\frac{x^2-28x+96}{(x^2-7x+2)^2},$$

que valdrá cero si:

$$x^2-28x+96=0\quad\Longleftrightarrow\quad x=\frac{28\pm\sqrt{400}}{2}=14\pm10.$$

Y como $x\in[0,7]$ nos quedamos con

$$x=4.^{b}$$

---

[a] Otra forma de ver ésto sería derivar: $\theta'(x)=\frac{1}{1+\phi(x)^2}\phi'(x)$.

[b] Para ver que es un máximo podríamos ver el cambio de signo de la derivada factorizándola:

$$\phi'(x)=\frac{(x-24)(x-4)}{(x^2-7x+2)^2},$$

que es positivo antes del cuatro y negativo después y por lo tanto la función pasa de ser creciente a ser decreciente y se trataría así de un máximo.

Ejercicio 4 —10 puntos: 5 puntos cada apartado—

1 *Estudia el carácter de la serie* $\displaystyle\sum_n (-1)^n \frac{5^n n!}{2^n n^n}$.

Solución. *Aplicamos el criterio del cociente de D'Alembert:*

$$\alpha = \lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_n \frac{5^{n+1}\ (n+1)!\ 2^n\ n^n}{5^n\ (n+1)^{n+1}\ 2^{n+1}\ n!} = \frac{5}{2}\lim_n \big(\frac{n}{n+1}\big)^n.$$

Como este último límite es una indeterminación del tipo 1^∞ *aplicamos la Fórmula de Euler:*

$$\alpha = \frac{5}{2} e^{\lim_n \big(\frac{n}{n+1} - 1\big) n} = \frac{5}{2} e^{-1} = \frac{5}{2e} < 1,$$

con lo que la serie converge.

2 *Calcula* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n + 5^n}{5^n + 3^n}\right)^{(5/2)^n}$.

Solución. *Como*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 5^n}{5^n + 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n\big((2/5)^n + 1\big)}{5^n\big(1 + (3/5)^n\big)} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \big(\frac{5}{2}\big)^n = +\infty,$$

se trata de una indeterminación del tipo 1^∞ *que resolvemos mediante la Fórmula de Euler:*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n + 5^n}{5^n + 3^n}\right)^{(5/2)^n} &= e^{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n + 5^n}{5^n + 3^n} - 1\right) \big(\frac{5}{2}\big)^n} \\
&= e^{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n - 3^n}{5^n + 3^n}\right) \big(\frac{5}{2}\big)^n} \\
&= e^{\lim_{n\to\infty} \frac{10^n - 15^n}{10^n + 6^n}} \\
&= e^{\lim_{n\to\infty} \frac{15^n\big((10/15)^n - 1\big)}{10^n\big(1 + (6/10)^n\big)}} \\
&= e^{-\infty} = 0.
\end{aligned}$$

Ejercicio 5 —`10 puntos: 5 puntos cada apartado`—

1 *Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x|x| + e^x - 1$ en el origen.*

Solución. *La ecuación de la recta tangente a f en el origen será:*

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \text{ esto es } y - 1 = f'(0)x.$$

Calculamos entonces $f'(0)$. Como la función $y = |x|$ no es derivable en el origen no podemos usar la reglas de derivación por lo que aplicamos la definición:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x|x| + e^x - 1}{x}.$$

Este último límite es una indeterminación del tipo $0/0$ en el que no podemos usar la regla de l'Hôpital porque no podemos derivar el numerador (debido al módulo). Para quitar el valor absoluto hacemos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x|x| + e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x + e^x}{1} = 1,$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x|x| + e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x^2 + e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-2x + e^x}{1} = 1,$$

Como los límites laterales coinciden el límite existe y vale 1. Así $f'(0) = 1$ y por lo tanto la ecuación de la recta tangente es:

$$y = x.$$

2 *Calcula la derivada de la función $f(x) = \dfrac{x^2 \operatorname{atan}(x)\ 7^x}{\sqrt{x}\ \log(x)\ \cos(x)}$.*

Solución. *Aplicamos la derivación logarítmica.*
Tomando logaritmos:

$$\begin{aligned}
\log(f(x)) &= \log\left(\frac{x^2 \operatorname{atan}(x)\ 7^x}{\sqrt{x}\ \log(x)\ \cos(x)}\right) \\
&= 2\log(x) + \log(\operatorname{atan}(x)) + x\log(7) - \frac{1}{2}\log(x) - \log(\log(x)) - \log(\cos(x)) \\
&= \frac{3}{2}\log(x) + \log(\operatorname{atan}(x)) + x\log(7) - \log(\log(x)) - \log(\cos(x)),
\end{aligned}$$

derivando en ambas partes:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{3}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{\operatorname{atan}(x)}\frac{1}{1 + x^2} + \log(7) - \frac{1}{\log(x)}\frac{1}{x} + \frac{1}{\cos(x)}\operatorname{sen}(x).$$

Despejando:

$$f'(x) = \frac{x^2 \operatorname{atan}(x)\ 7^x}{\sqrt{x}\ \log(x)\ \cos(x)}\left(\frac{3}{2x} + \frac{1}{(1 + x^2)\operatorname{atan}(x)} + \log(7) - \frac{1}{x\log(x)} + \tan(x)\right).$$