Segundo Parcial de Matemáticas II
Grado Ingeniería Biomédica

ETSII de València. Junio de 2018

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIEROS INDUSTRIALES VALENCIA

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Apellidos	Nombre

Instrucciones

1. Comienza poniendo el nombre y apellidos.
2. En la pregunta de Verdadero o Falso marca claramente tu respuesta. En otro caso la pregunta no será puntuada.
3. Excepto en la primera pregunta pon todos los cálculos necesarios.
4. No se puede usar ningún tipo de material de consulta ni asistentes electrónicos.
5. Escribe con bolígrafo azul o negro.
6. El tiempo total es de 2 horas.

Nota final

Puntuación

Ejercicio 1	1	______
	2	______
Ejercicio 2		______
Ejercicio 3		______
Ejercicio 4		______
Ejercicio 5	1	______
	2	______

Ejercicio 1 —`10 puntos: 5 puntos cada apartado`—

1 Indica si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas (no hay que justificar nada).

`Pregunta correcta: 0.5 puntos   Pregunta incorrecta: -0.25 puntos   Pregunta en blanco: 0 puntos`

- **V** / **F** $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.
- **V** / **F** *La aproximación lineal de* $f(x) = \sqrt{1-x}$ *en el origen es* $L(x) = 1 + x/2$.
- **V** / **F** *Si una serie de potencias de centro* $a = 0$ *es convergente en el punto* $x = 2$ *entonces también lo será en* $x = -1$.
- **V** / **F** *Si una serie de potencias de centro* $a = 0$ *es divergente en el punto* $x = 2$ *entonces también lo será en* $x = -2$.
- **V** / **F** *La función* $R(\text{sen}(x), \cos(x)) = \text{sen}^3(x) + 1$ *es impar en seno.*
- **V** / **F** *El volumen de una superficie cuyas secciones mediante planos paralelos al plano XY tienen un área* $A(z)$ *(con* $z \in [a,b]$*) viene dado por es* $V = \pi \int_a^b A(z)^2 dz$.
- **V** / **F** $\frac{d}{dx}\left(\int_x^{x^2} \frac{e^{-t}}{t} dt\right) = \frac{2e^{-x^2} - e^{-x}}{x}$.
- **V** / **F** *El dominio de convergencia de la serie de potencias* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ *es* $[-1, 1]$.
- **V** / **F** *La suma de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!}$ *es* $e^{-2} - 1$.
- **V** / **F** *El radio de convergencia de la serie de potencias* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ *es* $R = 2$.

2 *Decimos que una función* F *es una primitiva de* f *si* $\boxed{F\text{'} = f}$.

Vamos a demostrar que si F *y* G *son dos primitivas de una misma función* f *entonces* $F = G + k$ *siendo* k *una constante. En efecto veamos que la función* $h = F - G$ *es constante. Por ser* F *y* G *primitivas de* f *se tiene que:*

$$\boxed{h' = 0}$$

Vamos entonces a aplicar el Teorema $\boxed{\text{del valor medio}}$ *para demostrar que* h *es constante. Sean* $x < y$ *y demostremos que* $h(x) = h(y)$. *Aplicando el teorema anterior existe*

$$\boxed{z \text{ en el intervalo }]x, y[}$$

de manera que

$$\boxed{h(y) - h(x) = h'(z)(y - x)}$$

Y como $h' = 0$ *entonces* $h(y) - h(x) = 0$ *y por lo tanto* h *es constante.*

Ejercicio 2 Calcula el desarrollo de MacLaurin de la función $f(x) = \frac{1}{3}\mathrm{atan}(3x)$ indicando el radio de convergencia de la serie de potencias obtenida.

Solución. Derivando y usando el desarrollo de una serie geométrica tenemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}\frac{3}{1+(3x)^2} = \frac{1}{1+9x^2} = \frac{1}{1-(-9x^2)} \\ &= 1 + (-9x^2) + (-9x^2)^2 + (-9x^2)^3 + (-9x^2)^4 + \ldots \\ &= 1 - 9x^2 + 9^2x^4 - 9^3x^6 + 9^4x^8 + \ldots \end{aligned}$$

siempre que $|-9x^2| < 1$ o lo que es lo mismo $|x|^2 < \frac{1}{9}$ y por tanto $|x| < \frac{1}{3} = R$.
Integrando término a término:

$$f(x) = x - 9\frac{x^3}{3} + 9^2\frac{x^5}{5} - 9^3\frac{x^7}{7} + 9^4\frac{x^9}{9} + \ldots + C = x - \frac{9}{3}x^3 + \frac{9^2}{5}x^5 - \frac{9^3}{7}x^7 + \frac{9^4}{9}x^9 + \ldots + C,$$

siempre que $|x| < \frac{1}{3} = R$. Queda calcular C.
Pero tomando $x = 0$ tenemos que

$$C = f(0) = \frac{1}{3}\mathrm{atan}(0) = 0.$$

En definitiva:

$$\frac{1}{3}\mathrm{atan}(3x) = x - \frac{9}{3}x^3 + \frac{9^2}{5}x^5 - \frac{9^3}{7}x^7 + \frac{9^4}{9}x^9 + \ldots$$

y el radio de convergencia es $R = 1/3$.

Otra forma. Usando el desarrollo de la arcotangente sabemos que:

$$\mathrm{atan}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \text{ siempre que } |x| < 1$$

En nuestro caso

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}\mathrm{atan}(3x) \\ &= \frac{1}{3}\left((3x) - \frac{(3x)^3}{3} + \frac{(3x)^5}{5} - \frac{(3x)^7}{7} + \ldots\right) \\ &= x - \frac{3^2x^3}{3} + \frac{3^4x^5}{5} - \frac{3^6x^7}{7} + \frac{3^8x^9}{9} - \ldots \\ &= x - \frac{3^2}{3}x^3 + \frac{3^4}{5}x^5 - \frac{3^6}{7}x^7 + \frac{3^8}{9}x^9 - \ldots \end{aligned}$$

siempre que $|3x| < 1$ o lo que es lo mismo si $|x| < \frac{1}{3} = R$

Ejercicio 3 Calcula el volumen de la superficie de revolución que se obtiene al girar, alrededor del eje OX, la función $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x+1}}$ para $x \in [1, 2]$.

Solución. En primer lugar

$$V = \pi \int_a^b \big(f(x)\big)^2 dx = \pi \int_1^2 \big(\frac{1}{x\sqrt{x+1}}\big)^2 dx = \pi \int_1^2 \frac{dx}{x^2(x+1)}.$$

Se trata de una integral racional que resolvemos mediante la descomposición en fracciones simples:

$$x^2(x+1) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{doble} \\ x = -1 & \end{cases},$$

de donde

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} = \frac{Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2}{x^2(x+1)}.$$

Como los denominadores son iguales también lo serán los numeradores:

$$1 = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2.$$

Y puesto que A, B y C son independientes de x:

$$\begin{array}{lcll} x = 0 & : & 1 = B & \Longrightarrow B = 1, \\ x = -1 & : & 1 = C & \Longrightarrow C = 1, \\ x = 1 & : & 1 = 2A + 2B + C & \Longrightarrow A = -1. \end{array}$$

Sustituyendo en la integral

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^2 \big(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}\big) dx = \pi \Big[-\log x + \frac{-1}{x} + \log(x+1) \Big]_1^2 \\ &= \pi \Big[-\log 2 + \frac{-1}{2} + \log(3) - \big(-\log 1 + \frac{-1}{1} + \log(2) \big) \Big] = \\ &= \pi \Big[\frac{1}{2} + \log(3) - 2\log(2) \Big]. \end{aligned}$$

Ejercicio 4 Calcula la longitud de la curva $f(x) = \dfrac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}$ para $x \in [1,2]$.

Solución.

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + f'(x)^2}dx,$$

y como

$$f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} \qquad \text{entonces} \qquad f'(x) = \frac{2}{3}\frac{3}{2}(x+1)^{1/2} = (x+1)^{\frac{1}{2}},$$

sustituyendo en la integral

$$\begin{aligned} L &= \int_1^2 \sqrt{1 + \left((x+1)^{1/2}\right)^2}dx = \int_1^2 \sqrt{2+x}\; dx \\ &= \int_1^2 (2+x)^{1/2}dx = \left[\frac{(2+x)^{3/2}}{3/2}\right]_1^2 = \frac{2(8-3\sqrt{3})}{3}. \end{aligned}$$

Ejercicio 5 —`10 puntos: 5 puntos cada apartado`—

1 *Escribe el polinomio* $p(x) = x^3$ *en potencias de* $x + 1$.

Solución. *Sabemos que* $p(x) = P_n(x) + R_n(x)$ *donde* P_n *es el polinomio de Taylor de centro* $a = -1$. *Como* p *es un polinomio de grado* $n = 3$ *aplicando la fórmula del resto de Lagrange (con este valor de* n*) tenemos que*

$$R_3(x) = \frac{p^{iv)}(z)}{4!}(x+1)^4 = 0 \quad \text{para un } z \text{ entre } a = -1 \text{ y } x,$$

porque $p^{iv)}(z) = 0$. *De esta manera*

$$p(x) = P_3(x) = p(-1) + p'(-1)(x+1) + \frac{p''(-1)}{2}(x+1)^2 + \frac{p'''(-1)}{3!}(x+1)^3.$$

Y como $p(x) = x^3$, $p'(x) = 3x^2$, $p''(x) = 6x$ *y* $p'''(x) = 6$ *entonces:*

$$p(x) = P_3(x) = -1+3(x+1)+\frac{-6}{2}(x+1)^2+\frac{6}{3!}(x+1)^3 = -1+3(x+1)+(-3)(x+1)^2+(x+1)^3.$$

2 *Calcula, usando un polinomio de MacLaurin de grado 2, una aproximación de* $\log(1.01)$. *Escribe un valor del error cometido.*

Solución. *Tomamos* $f(x) = \log(1+x)$ *y sabemos que* $f(x) = P_2(x) + R_2(x)$. *Usando el polinomio de MacLaurin de la función logaritmo sabemos que*

$$P_2(x) = x - \frac{x^2}{2}, \quad \text{con lo que} \quad f(0.01) \approx P_2(0.01) = 0.01 - \frac{(0.01)^2}{2} = 0.00995.$$

Para el error sabemos que

$$R_2(0.01) = \frac{f'''(z)}{3!}(0.01)^3 \quad \text{siendo } z \text{ un valor entre} \quad a = 0 \quad \text{y} \quad x = 0.01.$$

Y como $f(x) = \log(1+x)$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$, $f'''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$, *entonces*

$$f'''(z) = \frac{2}{(1+z)^3}.$$

Pero como $0 < z < 0.01$ *entonces*

$$1 < 1+z < 1.01 \Longrightarrow 1 < (1+z)^3 < (1.01)^3 \Longrightarrow \frac{1}{(1.01)^3} < \frac{1}{(1+z)^3} < 1,$$

En definitiva

$$f'''(z) = \frac{2}{(1+z)^3} \leq \frac{2}{1} = 2,$$

y por lo tanto

$$R_2(0.01) = \frac{f'''(z)}{3!}(0.01)^3 \leq \frac{2}{3!}(0.01)^3 = \frac{1}{3000000}.$$