Segundo Parcial de Matemáticas II
Grado Ingeniería Biomédica

ETSII de Valencia. Mayo de 2017

Apellidos	Nombre

Instrucciones

1. Comienza poniendo el nombre y apellidos.
2. En la pregunta de Verdadero o Falso marca claramente tu respuesta. En otro caso la pregunta no será puntuada.
3. Excepto en la primera pregunta pon todos los cálculos necesarios.
4. No se puede usar ningún tipo de material de consulta ni asistentes electrónicos.
5. Escribe con bolígrafo azul o negro.
6. El tiempo total es de 2 horas.

Nota final

Puntuación

Ejercicio 1	1	______
	2	______
Ejercicio 2		______
Ejercicio 3		______
Ejercicio 4		______
Ejercicio 5		______

Ejercicio 1 —`10 puntos: 5 puntos cada apartado`—

1 Indica si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas (no hay que justificar nada). **Las respuestas correctas suman 0.5 puntos y las incorrectas restan 0.25 puntos.**

V / F	$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.
V / F	*La aproximación lineal de* $f(x) = \sqrt{1+x}$ *en el origen es* $L(x) = 1 + x/2$.
V / F	*Si una serie de potencias de centro* $a = 0$ *es convergente en el punto* $x = 2$ *entonces también lo será en* $x = 1$.
V / F	*Si una serie de potencias de centro* $a = 0$ *es divergente en el punto* $x = 2$ *entonces también lo será en* $x = 3$.
V / **F**	*La función* $R(\operatorname{sen}(x), \cos(x)) = \cos^3(x) - \operatorname{sen}^2(x) - 1$ *es impar en coseno.*
V / **F**	*El volumen de una superficie cuyas secciones mediante planos paralelos al plano XY tienen un área* $A(z)$ *(con* $z \in [a, b]$*) viene dado por es* $V = \pi \int_a^b A(z)dz$.
V / F	$\frac{d}{dx}\left(\int_x^{x^2} \frac{e^t}{t} dt\right) = \frac{2e^{x^2} - e^x}{x}$.
V / F	*Si* $f(x, y) = x^2 - y^2$ *entonces* $D_{(1,-1)} f(x, y) = \sqrt{2}(x + y)$.
V / **F**	*La suma de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n!}$ *es* $e^{-2} - 1$.
V / **F**	*Si las derivadas parciales de una función en un punto son finitas entonces también lo son todas las derivadas direccionales.*

2 Demuestra que si $z = f(x, y)$ entonces $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \rho\frac{\partial z}{\partial \rho}$ siendo $x = \rho\cos(\theta)$ e $y = \rho\operatorname{sen}(\theta)$.

Usando la regla de la cadena

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho},$$

y como

$$x = \rho\cos(\theta) \Longrightarrow \frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos(\theta) \qquad \textbf{y también} \qquad y = \rho\operatorname{sen}(\theta) \Longrightarrow \frac{\partial y}{\partial \rho} = \operatorname{sen}(\theta).$$

Luego

$$\rho\frac{\partial z}{\partial \rho} = \rho\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho}\right) = \rho\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos(\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen}(\theta)\right) = \frac{\partial z}{\partial x}\underbrace{\rho\cos(\theta)}_{x} + \frac{\partial z}{\partial y}\underbrace{\rho\operatorname{sen}(\theta)}_{y} = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Ejercicio 2 Calcula el desarrollo de MacLaurin de la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ indicando el radio de convergencia de la serie de potencias obtenida.

Como $f(x) = (1-x^2)^{-1/3}$ **se trata de una serie binomial con** $p = -1/3$

$$f(x) = \big(1 + (-x^2)\big)^{-1/3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/3}{n} (-x^2)^n, \quad \textbf{siempre que} \quad |-x^2| < 1.$$

Calculando el número binomial para $n \geq 1$

$$\binom{-1/3}{n} = \frac{-\frac{1}{3}\big(-\frac{1}{3}-1\big)\cdots\big(-\frac{1}{3}-n+1\big)}{n!} = \frac{-\frac{1}{3}(-\frac{4}{3})(-\frac{7}{3})\cdots(-\frac{3n-2}{3})}{n!} = \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{3^n \cdot n!},$$

con lo que sustituyendo

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/3}{n} (-x^2)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{3^n \cdot n!} (-x^2)^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{3^n \cdot n!} (-1)^n x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{3^n \cdot n!} x^{2n}. \end{aligned}$$

Como este desarrollo vale si $|-x^2| < 1 \iff |x|^2 < 1, \iff |x| < 1$
entonces el radio de convergencia de la serie es $R = 1$**.**

Ejercicio 3 Calcula el volumen de la superficie de revolución que se obtiene al girar, alrededor del eje OX, la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3+5x^2+6x}}$ para $x \in [1,2]$.

En primer lugar

$$V = \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x^3+5x^2+6x}}\right)^2 dx = \pi \int_1^2 \frac{dx}{x^3+5x^2+6x}.$$

Se trata de una integral racional que resolvemos mediante la descomposición en fracciones simples:

$$x^3+5x^2+6x = x(x^2+5x+6) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = -3 \text{ ó } -2 \end{cases},$$

de donde

$$\frac{1}{x^3+5x^2+6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} = \frac{A(x+2)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x+2)}{x(x+2)(x+3)}.$$

Como los denominadores son iguales también lo serán los numeradores:

$$1 = A(x+2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x+2).$$

Y puesto que A, B y C son independientes de x:

$$\begin{array}{lcll} x=0 & : & 1 = 6A & \Longrightarrow A = 1/6, \\ x=-2 & : & 1 = -2B & \Longrightarrow B = -1/2, \\ x=-3 & : & 1 = 3C & \Longrightarrow C = 1/3. \end{array}$$

Sustituyendo en la integral

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^2 \left(\frac{1/6}{x} + \frac{-1/2}{x+2} + \frac{1/3}{x+3}\right) dx = \pi \left[\frac{1}{6}\log x - \frac{1}{2}\log(x+2) + \frac{1}{3}\log(x+3)\right]_1^2 \\ &= \pi \left[\frac{1}{6}\log 2 - \frac{1}{2}\log 4 + \frac{1}{3}\log 5 - \left(-\frac{1}{2}\log 3 + \frac{1}{3}\log 4\right)\right] = \\ &= \pi \left[\frac{1}{6}\log 2 + \frac{1}{2}\log 3 - \frac{5}{6}\log 4 + \frac{1}{3}\log 5\right] = \\ &= \pi \left[-\frac{3}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\log 3 + \frac{1}{3}\log 5\right] = \end{aligned}$$

Ejercicio 4 Calcula la longitud de la curva $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$ para $x \in [0, 1]$.

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}dx,$$

y como

$$f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} = (x-1)^{3/2} \qquad \textbf{entonces} \qquad f'(x) = \frac{2}{3}\frac{3}{2}(x-1)^{1/2} = (x-1)^{\frac{1}{2}},$$

sustituyendo en la integral

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left((x-1)^{1/2}\right)^2}dx = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \int_0^1 x^{1/2}dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Este problema tenía una errata. Al parecer nadie se ha dado cuenta porque casi todo el mundo ha respondido lo que pone arriba 😲.
En realidad $x \in [1, 2]$ porque sino la función

$$f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$$

no está bien definida en el intervalo $[0, 1]$ (ya que la integral sería negativa). En este caso la solución correcta sería:

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + f'(x)^2}dx,$$

y como

$$f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} = (x-1)^{3/2} \qquad \textbf{entonces} \qquad f'(x) = \frac{2}{3}\frac{3}{2}(x-1)^{1/2} = (x-1)^{\frac{1}{2}},$$

sustituyendo en la integral

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left((x-1)^{1/2}\right)^2}dx = \int_1^2 \sqrt{x}dx = \int_1^2 x^{1/2}dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_1^2 = \frac{2(\sqrt{8}-1)}{3}.$$

Ejercicio 5 Consideremos la función $f(x,y)=\cos(x)\displaystyle\int_0^y e^{t^2}\,dt$.
(a) (2 puntos) Demuestra que f diferenciable en el punto $(\pi/6,0)$.
(b) (8 puntos) Calcula la derivada direccional de $z=f(x,y)$ en el punto $(\pi/6,0,0)$ y en la dirección del vector $(1,1)$.

(a) Como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\operatorname{sen}(x)\int_0^y e^{t^2}\,dt,$$

es continua en $\mathbb{R}^2$ por ser producto de un seno por una integral (que es continua por el Teorema Fundamental del Cálculo II ya que $f(t)=e^{t^2}$ es continua en $\mathbb{R}$) y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\cos(x)e^{y^2},$$

es continua en $\mathbb{R}^2$ por ser producto de un coseno y una exponencial, entonces f es diferenciable en el punto $(\pi/6,0)$.

(b) Como f es diferenciable en el punto $(\pi/6,0)$ entonces la derivada direccional de f en la dirección del vector $u=(1,1)$ y en el punto$(\pi/6,0)$ será:

$$D_uf(\frac{\pi}{6},0)=\left(\nabla f(\frac{\pi}{6},0)\,|\,(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{6},0)+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{6},0).$$

Y como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\operatorname{sen}(x)\int_0^y e^{t^2}\,dt\Longrightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{6},0)=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\cos(x)e^{y^2}\,dt\Longrightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{6},0)=\cos(\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

En definitiva:

$$D_uf(\frac{\pi}{6},0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 0+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}.$$