ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIEROS INDUSTRIALES VALENCIA

Segundo Parcial de Matemáticas II
Grado Ingeniería Biomédica

ETSII de València. Mayo de 2019

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Apellidos	Nombre

Instrucciones

1. Comienza poniendo el nombre y apellidos.
2. En la pregunta de Verdadero o Falso marca claramente tu respuesta. En otro caso la pregunta no será puntuada.
3. Excepto en la primera pregunta pon todos los cálculos necesarios.
4. No se puede usar ningún tipo de material de consulta ni asistentes electrónicos.
5. Escribe con bolígrafo azul o negro.
6. El tiempo total es de 2 horas.

Nota final

Puntuación

Ejercicio 1	1	______
	2	______
Ejercicio 2		______
Ejercicio 3		______
Ejercicio 4		______
Ejercicio 5	1	______
	2	______

Ejercicio 1 —`10 puntos: 5 puntos cada apartado`—

1 Indica si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas (no hay que justificar nada). **Las respuestas correctas suman 0.5 puntos y las incorrectas restan 0.25 puntos.**

- **V** / **F** $x\cos(x) = x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} - \frac{x^7}{6!} + \ldots$ *para todo* $x \in]-1, 1[$.
- **V** / **F** $\operatorname{sen}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.
- **V** / **F** *La aproximación lineal de* $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ *en el origen es* $L(x) = 1 + x/3$.
- **V** / **F** *Si una serie de MacLaurin es divergente en el punto* $x = 3$ *y convergente en* $x = -3$ *entonces su radio de convergencia es igual a* 3.
- **V** / **F** *La longitud de una curva* $y = f(x)$ *para* $x \in [a, b]$ *es* $L(x) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)} dx$.
- **V** / **F** *Si una serie de potencias es convergente en el punto* $x = 1$ *entonces la serie de potencias de su derivada también convergerá en dicho punto.*
- **V** / **F** $\frac{d}{dx}\left(\int_x^{x^2} e^{t^2} dt\right) = e^{-x^4} 2x - e^{-x^2}$.
- **V** / **F** *La suma de la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2}}{n!}$ *es* $e^{\sqrt{2}}$.
- **V** / **F** *La suma de la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\pi/2)^{2n}}{(2n+1)!}$ *es* $\frac{2}{\pi}$.
- **V** / **F** *La suma de la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2}{n} 3^n$ *es* 16.

2 *Escribe la ecuación (o ecuaciones) que describan las siguientes figuras geométricas en* $\mathbb{R}^3$*:*

(1) Paraboloide elíptico de vértice en $(0, 0, 2)$ *y de sección a la altura del plano* $z = 0$ *una circunferencia de centro* $(0, 0)$ *y radio* $\sqrt{2}$.

$$\boxed{2 - z = x^2 + y^2}$$

(2) Cono de vértice en $(0, 0, 2)$ *y de sección a la altura del plano* $z = 0$ *una circunferencia de centro* $(0, 0)$ *y radio* $\sqrt{2}$.

$$\boxed{\sqrt{2}(2 - z)/2 = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

(3) Cilindro de centro en el punto $(1, 1, 0)$ *y de sección (perpendicular al eje OZ) una circunferencia de radio* 2.

$$\boxed{(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4}$$

(4) Esfera de centro $(1, 1, 1)$ *y de radio* 5.

$$\boxed{(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 25}$$

(5) Circunferencia de centro $(1, 1, 0)$*, radio* 5 *situada en el plano* OXY.

$$\boxed{(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 25 \quad \& \quad z = 0}$$

Ejercicio 2 Calcula el dominio de convergencia de la serie $\sum_n \frac{x^{3n}}{7^n n}$.

Solución. *Teniendo en cuenta que*

$$\sum_n \frac{x^{3n}}{7^n n} = \sum_n \frac{(x^3)^n}{7^n n},$$

hacemos el cambio $y = x^3$, *obteniendo la serie de potencias*

$$\sum_n \frac{y^n}{7^n n}$$

cuyo centro es $a = 0$ *y con* $c_n = \frac{1}{7^n n}$. *El radio de convergencia de ésta será*

$$R_y = \left(\lim_n \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|\right)^{-1} = \left(\lim_n \left|\frac{7^n n}{7^{n+1}(n+1)}\right|\right)^{-1} = 7.$$

Esto significa que la serie converge si $|y| < 7$ *y diverge si* $|y| > 7$.
Y como $y = x^3$ *esto ocurrirá si:*

$$|y| < 7 \iff |x^3| < 7 \iff |x|^3 < 7 \iff |x| < \sqrt[3]{7},$$

$$|y| > 7 \iff |x^3| > 7 \iff |x|^3 > 7 \iff |x| > \sqrt[3]{7}.$$

Asi la serie de potencias original converge en $]-\sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{7}[$ *y diverge* $]-\infty, -\sqrt[3]{7}[\cup]\sqrt[3]{7}, +\infty[$.
Queda estudiar la convergencia en los extremos:

$\boxed{x = \sqrt[3]{7}}$ *Tenemos la serie numérica* $\sum_n \frac{1}{n}$ *que es la serie armónica y por tanto diverge.*

$\boxed{x = -\sqrt[3]{7}}$ *Tenemos la serie numérica* $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ *que es la serie armónica alternada y que sabemos que es convergente aplicando el criterio de Leibniz pues:*

$$b_n = \frac{1}{n} \text{ es una sucesión decreciente con límite cero.}$$

En definitiva el dominio de convergencia es el intervalo

$$D = [-\sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{7}[.$$

Ejercicio 3 Calcula el desarrollo de MacLaurin de la función $f(x) = \dfrac{1}{(2+3x)^2}$.

Solución. Reescribiendo la función

$$f(x) = (2+3x)^{-2} = 2^{-2}\left(1+\frac{3x}{2}\right)^{-2},$$

se trata de una serie binomial con $p=-2$ que convergerá si $\left|\dfrac{3x}{2}\right| < 1$. En este caso

$$f(x) = (2+3x)^{-2} = 2^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}\big(\frac{3x}{2}\big)^n.$$

Calculando el número binomial (para $n = 0, 1, \ldots$):

$$\binom{-2}{0} = 1, \quad \binom{-2}{n} = \frac{(-2)(-3)(-4)\cdots(-2-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^n(n+1)!}{n!} = (-1)^n(n+1).$$

Sustituyendo,

$$f(x) = 2^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\frac{3^n}{2^n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n(n+1)}{2^{n+2}}x^n,$$

siempre que $|x| < \dfrac{2}{3}$.

Ejercicio 4 Calcula el volumen de la superficie de revolución que se obtiene al girar, alrededor del eje OX, la función $f(x) = \begin{cases} \cos(x) & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen}(x) & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$ en el intervalo $[0, \pi]$.

Solución. En primer lugar

$$V = \pi \int_a^b \big(f(x)\big)^2 dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) dx + \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{sen}^2(x) dx.$$

Como hemos visto en clase, usando las fórmulas trigonométricas:

$$\left.\begin{array}{l} \cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1 \\ \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) = \cos(2x) \end{array}\right\} \text{ de donde } \left\{\begin{array}{l} \cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2} \\ \operatorname{sen}^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2} \end{array}\right.$$

De esta manera

$$\begin{aligned} V &= \pi\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{sen}^2(x)dx\Big) \\ &= \pi\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2x)}{2}dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1-\cos(2x)}{2}dx\Big) \\ &= \frac{\pi}{2}\Big(\Big[x + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \Big[x - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\Big) \\ &= \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

Nota. Haciendo la representación gráfica se puede ver que el volumen estaba formado por dos figuras iguales con lo que:

$$V = \pi \int_a^b \big(f(x)\big)^2 dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2x)}{2}dx = \pi\Big[x + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{2}.$$

Ejercicio 5 —`10 puntos: 7 puntos el primer apartado y 3 el segundo`—

Queremos calcular el valor aproximado de $\alpha = \int_0^{0.01} e^{t^2}\,dt.$

1. *Calcular el polinomio de MacLaurin de grado 2 de la función* $f(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$ *y utilizarlo para estimar el valor aproximado de* α.

   Solución. *Sabemos que* $f(x) = P_2(x) + R_2(x)$. *Y como:*

$$f(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt \Longrightarrow f'(x) = e^{x^2} \Longrightarrow f''(x) = 2xe^{x^2},$$

entonces

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1, \qquad f''(0) = 0,$$

con lo que

$$P_2(x) = x, \quad \text{y por lo tanto} \quad \alpha = f(0.01) \approx P_2(0.01) = 0.01.$$

2. *Demuestra que el error cometido en la aproximación es menor que* $(0.01)^3$.

   Solución. *Para el error sabemos que*

$$R_2(0.01) = \frac{f'''(z)}{3!}(0.01)^3 \quad \text{siendo } z \text{ un valor entre} \quad a = 0 \quad \text{y} \quad x = 0.01.$$

Y como

$$f''(x) = 2xe^{x^2} \Longrightarrow f'''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} = (2 + 4x^2)e^{x^2}$$

entonces $f'''(z) = (2 + 4z^2)e^{z^2}$.

Pero como $0 < z < 0.01$ *entonces* $0 < z^2 < (0.01)^2$ *con lo que:*

$$0 < z^2 < (0.01)^2 \Longrightarrow 0 < 4z^2 < 4(0.01)^2 \Longrightarrow 2 < 2 + 4z^2 < 2 + 4(0.01)^2,$$

$$0 < z^2 < (0.01)^2 \Longrightarrow 1 < e^{z^2} < e^{4(0.01)^2}.$$

En definitiva

$$f'''(z) = (2 + 4z^2)e^{z^2} \le \underbrace{(2 + 4(0.01)^2)}_{\le 3}\underbrace{e^{4(0.01)^2}}_{\le 2} \le 6,$$

y por lo tanto

$$R_2(0.01) = \frac{f'''(z)}{3!}(0.01)^3 \le \frac{6}{3!}(0.01)^3 = (0.01)^3.$$

Nota. *Otra forma de obtener la desigualdad para* f''' *sería tener en cuenta que como es una función creciente en* $[0, 0.01]$ *entonces el mayor valor se dará en el extremo derecho del intervalo y por tanto:*

$$f'''(z) = (2 + 4z^2)e^{z^2} \le \underbrace{(2 + 4(0.01)^2)}_{\le 3}\underbrace{e^{4(0.01)^2}}_{\le 2} \le 6,$$