ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIEROS INDUSTRIALES VALENCIA

Primer Parcial de Matemáticas II
Grado Ingeniería Biomédica

ETSII de València. Abril de 2021

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Apellidos	Nombre

Instrucciones

1. Comienza poniendo el nombre y apellidos.
2. En la pregunta de Verdadero o Falso marca claramente tu respuesta. En otro caso la pregunta no será puntuada.
3. Excepto en la primera pregunta pon todos los cálculos necesarios.
4. No se puede usar ningún tipo de material de consulta ni asistentes electrónicos.
5. Escribe con bolígrafo azul o negro.
6. El tiempo total es de 2 horas.

Nota final

Puntuación

Ejercicio 1	1	______
	2	______
Ejercicio 2		______
Ejercicio 3	1	______
	2	______
Ejercicio 4	1	______
	2	______
Ejercicio 5	1	______
	2	______

Ejercicio 1 —10 puntos: 5 puntos cada apartado—

1 *Indica si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas (no hay que justificar nada).*

Pregunta correcta: 0.5 puntos   Pregunta incorrecta: -0.25 puntos   Pregunta en blanco: 0 puntos

V / **F**	*La serie* $\sum_n \frac{1}{n(-1)^n}$ *es convergente.*
V / **F**	$\lim_{x\to-\infty} \left[e^x\right] = 0.$
V / **F**	*Si* $\left[\log(x)\right] = 1$ *entonces* $1 \leq x < 2.$
V / **F**	*La tasa de variación instantánea en el origen de* $f(x) = x\|x\|$ *es nula.*
V / **F**	$\lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n^2+2}}{n-\sqrt{n}} = 1.$
V / **F**	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$
V / **F**	*La función* $f(x) = \cos(x\|x\|^3) + x^2$ *es una función par.*
V / **F**	*Si* $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 1$ *entonces* $\sum_n a_n$ *es convergente.*
V / **F**	$\lim_{x\to-\infty} \frac{5^x + 3\log(x)}{3^x + 5\log(x)} = \frac{3}{5}.$
V / **F**	*Si* f *es una función continua en un punto* a *entonces* $\left[f\right]$ *también lo es.*

2 *Demuestra que si una función tiene derivada negativa en un entorno de un punto entonces la función es decreciente en dicho entorno.*

Demostración. *Como queremos ver que la función es decreciente, si tomamos* x_1 *y* x_2 *en el entorno del punto verificando la desigualdad* $\boxed{x_1 < x_2}$ *entonces tenemos que demostrar la desigualdad* $\boxed{f(x_1) \geq f(x_2)}$ *o, lo que es lo mismo, que* $\boxed{f(x_2) - f(x_1)}$ *tiene signo negativo.*

Para ello, aplicamos el Teorema del valor medio en el intervalo cerrado $\boxed{[x_1, x_2]}$

que nos proporciona un punto c *en el intervalo abierto* $\boxed{]x_1, x_2[}$

de forma que se cumple la igualdad:

$$\boxed{f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)}$$

Como por hipótesis la función es decreciente en el entorno entonces la derivada tiene signo $\boxed{\text{negativo}}$ *y por lo tanto* $f(x_2) - f(x_1)$ *tiene signo* $\boxed{\text{negativo}}$ *porque* $\boxed{x_2 - x_1}$ *tiene signo* $\boxed{\text{positivo}}$

Y eso es lo que queríamos demostrar.

Ejercicio 2 *Calcula el valor de la suma de la serie numérica* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-1)}$.

Solución. Se trata de una serie telescópica.
Hacemos la descomposición en fracciones simples:

$$a_n = \frac{1}{n(n^2-1)} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n} + \frac{C}{n+1} = \frac{An(n+1) + B(n-1)(n+1) + C(n-1)n}{n(n^2-1)}.$$

De donde: $1 = An(n+1) + B(n-1)(n+1) + C(n-1)n$,
y por lo tanto

$$\begin{aligned} n = -1 &\;:\; 1 = 2C \Longrightarrow C = 1/2 \\ n = 0 &\;:\; 1 = -B \Longrightarrow B = -1 \\ n = 1 &\;:\; 1 = 2A \Longrightarrow A = 1/2. \end{aligned}$$

De esta manera

$$a_n = \frac{1/2}{n-1} + \frac{-1}{n} + \frac{1/2}{n+1}.$$

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1/2}{1} + \frac{-1}{2} + \frac{1/2}{3} \\ a_3 &= \frac{1/2}{2} + \frac{-1}{3} + \frac{1/2}{4} \\ a_4 &= \frac{1/2}{3} + \frac{-1}{4} + \frac{1/2}{5} \\ a_6 &= \frac{1/2}{4} + \frac{-1}{5} + \frac{1/2}{6} \\ &\vdots \\ a_{n-2} &= \frac{1/2}{n-3} + \frac{-1}{n-2} + \frac{1/2}{n-1} \\ a_{n-1} &= \frac{1/2}{n-2} + \frac{-1}{n-1} + \frac{1/2}{n} \\ a_n &= \frac{1/2}{n-1} + \frac{-1}{n} + \frac{1/2}{n+1} \end{aligned}$$

Sumando todas las igualdades tenemos

$$a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = \frac{1/2}{1} + \frac{-1}{2} + \frac{1/2}{2} + \frac{1/2}{n} + \frac{-1}{n} + \frac{1/2}{n+1},$$

con lo que

$$\begin{aligned} \lim_n s_n &= \lim_n \left(a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n\right) \\ &= \lim_n \left(\frac{1/2}{1} + \frac{-1}{2} + \frac{1/2}{2} + \frac{1/2}{n} + \frac{-1}{n} + \frac{1/2}{n+1}\right) \\ &= \frac{1/2}{1} + \frac{-1}{2} + \frac{1/2}{2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Así la serie es convergente y suma $1/4$.

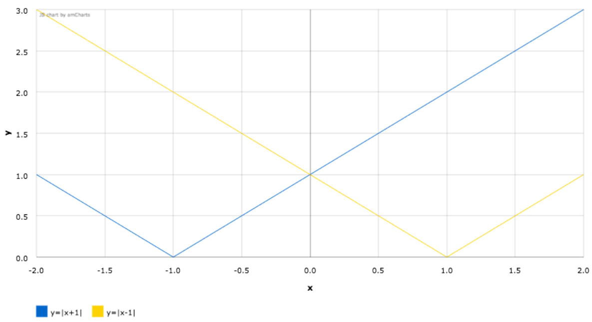
Ejercicio 3 —`10 puntos: 5 puntos cada apartado`—

1 *Calcula, donde sea posible, el valor de la suma de la serie* $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^3+\ldots$

Solución. *Se trata de una serie geométrica de razón* $r=\dfrac{1+x}{1-x}$ *que será convergente si, y sólo si,*

$$|r|=\left|\frac{1+x}{1-x}\right|<1 \Longleftrightarrow |1+x|<|1-x| \Longleftrightarrow x<0,$$

ya que



En este caso la suma será:

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n=\frac{\dfrac{1+x}{1-x}}{1-\dfrac{1+x}{1-x}}=\frac{1+x}{-2x}=-\frac{1+x}{2x}$$

2 *Calcula la tasa de variación instantánea en el origen de la función*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

Solución. *Aplicando la definición de derivada y la regla de l'Hôpital*

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}{x^3}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)+x(-\operatorname{sen}(x))-\cos(x)}{3x^2}\\
&= -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\\
&= -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Ejercicio 4 —`10 puntos: 5 puntos cada apartado`—

1 *Estudia el carácter de la serie* $\displaystyle\sum_n \frac{5^n n^n \log(n)}{2^n n!}$.

Solución. *Aplicamos el criterio del cociente de D'Alembert:*

$$\alpha = \lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_n \frac{5^{n+1}\ (n+1)^{n+1} \log(n+1)\ 2^n\ n!}{5^n\ n^n \log(n)\ 2^{n+1}\ (n+1)!} = \frac{5}{2} \lim_n \frac{\log(n+1)}{\log(n)} \lim_n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n.$$

Resolvemos la indeterminación aplicando la Fórmula de Euler:

$$\alpha = \frac{5}{2} \cdot 1 \cdot\ e^{\lim_n (\frac{n+1}{n} - 1)n} = \frac{5}{2} e.$$

Como $\alpha > 1$ *entonces la serie diverge.*

2 *Estudia el carácter de la serie* $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n}{2^n \log(n)}$.

Solución. *Se trata de una serie alternada. Aplicamos el criterio de Leibniz. Como las sucesiones* $(2^n)_n$ *y* $(\log n)_n$ *son crecientes entonces:*

$$b_n = \frac{1}{2^n \log(n)}$$

es una sucesión decreciente. Y como

$$\lim_n b_n = \lim_n \frac{1}{2^n \log(n)} = 0,$$

entonces la serie converge por el criterio de Leibniz.

OTRA FORMA: *Estudiamos si la serie es absolutamente convergente. Como*

$$\sum_n \left|\frac{(-1)^n}{2^n \log(n)}\right| = \sum_n \frac{1}{2^n \log(n)},$$

el criterio del cociente de D'Alembert:

$$\alpha = \lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_n \frac{2^n \log(n)}{2^{n+1} \log(n+1)} = \frac{1}{2} \lim_n \frac{\log(n)}{\log(n+1)} = \frac{1}{2}.$$

Como $\alpha < 1$ *la serie* $\sum_n |a_n|$ *es convergente. Esto significa que la serie original es absolutamente convergente y por lo tanto convergente.*

Ejercicio 5 —`10 puntos: 8 puntos el primer apartado y 2 el segundo`—

1 *Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x|x| + e^x$ en el origen.*

Solución. *La ecuación de la recta tangente a f en el origen será:*

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \text{ esto es } y - 1 = f'(0)x.$$

Calculamos entonces $f'(0)$. Como la función $y = |x|$ no es derivable en el origen no podemos usar la reglas de derivación por lo que aplicamos la definición:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x|x| + e^x - 1}{x}.$$

Este último límite es una indeterminación del tipo $0/0$ en el que no podemos usar la regla de l'Hôpital porque no podemos derivar el numerador (debido al módulo). Para quitar el valor absoluto hacemos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x|x| + e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 + e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x + e^x}{1} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x|x| + e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x^2 + e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-2x + e^x}{1} = 1.$$

Como los límites laterales coinciden el límite existe y vale 1. Así $f'(0) = 1$ y por lo tanto la ecuación de la recta tangente es:

$$y = x + 1.$$

Nota *Otra forma sin hacer los límites laterales sería separar en dos y aplicar l'Hôpital:*

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x|x| + e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}(x + \frac{e^x - 1}{x}) = \lim_{x\to 0} x + \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

2 *Descomponer el número π como suma de dos números positivos de forma que la suma de los logaritmos neperianos de los dos sumandos sea máxima.*

Solución. *Sean x e y dos números positivos tal que $\pi = x + y$, es decir $y = \pi - x$.*

Queremos optimizar

$$F(x, y) = \log(x) + \log(y) \Longrightarrow f(x) = \log(x) + \log(\pi - x).$$

Para ello derivamos e igualamos a cero:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi - x}(-1) = \frac{\pi - 2x}{x(\pi - x)} = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{2},$$

que es un máximo pues:

$$f''(x) = \frac{(-2)x(\pi - x) - (\pi - 2x)(\pi - 2x)}{x^2(\pi - x)^2} \Longrightarrow f''(\frac{\pi}{2}) < 0.$$