Apellidos	Nombre	Nota

Problema 1 *Calcula el dominio de convergencia de la serie de potencias* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}(x+2)^n$.

Solución. Serie de potencias de centro $a = -2$ y $c_n = 1/n^3$. Como el radio de convergencia es

$$R = \Big(\lim_n \frac{(n+1)^3}{n^3}\Big)^{-1} = 1,$$

la serie de potencias converge al menos en $]-3,-1[$. En $x = -3$ tenemos una serie alternada que converge (por Leibniz o por convergencia absoluta) y en $x = -1$ tenemos una serie armónica generalizada con $p = 3 > 1$ que también converge. En definitiva el dominio de convergencia es el intervalo $[-3,-1]$.

Problema 2 *Calcula desarrollo en serie de potencias de la función* $f(x) = \dfrac{1}{7+x^2}$ *indicando el radio de convergencia de la serie obtenida.*

Solución. Utilizando la serie geométrica tenemos:

$$f(x) = \frac{1}{7+x^2} = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{x^2}{7})} = \frac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x^2}{7})^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{7^{n+1}}x^{2n},$$

siempre que $\left|-\dfrac{x^2}{7}\right| < 1$ es decir si $|x| < \sqrt{7}$ y por lo tanto el radio de convergencia es $R = \sqrt{7}$.

Problema 3 *Calcula el valor de las siguientes sumas:*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^{2n}}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\pi/4)^{2n}}{(2n+1)!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}7^{-n}.$$

Solución.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{-1}{5^2})^n = \frac{1}{1-(-1/25)} = \frac{25}{26}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{n!} = 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!} = 3e^3.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\pi/4)^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{1}{\pi/4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\pi/4)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{4}{\pi}\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}7^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(\frac{1}{7})^n = (1+\frac{1}{7})^{-1/2} = \sqrt{\frac{7}{8}}.$$

Problema 4 *Escribe el polinomio* $p(x) = x^3 - 7x^2 + 5x - 1$ *en potencias de* $x+1$.

Solución. Calculamos el polinomio de Taylor de $p(x)$ de grado 3 centrado en $a = -1$:

$$P_3(x) = -14 + 22\,(x+1) - 10\,(x+1)^2 + (x+1)^3\,.$$

Pero como $p(x) = P_3(x) + R_3(x)$, usando la fórmula del resto de Lagrange $R_3(x) = \dfrac{p^{iv)}(z)}{4!}(x+1)^4$ para cierto z entre $a = -1$ y x. Y como $p^{iv)}(x) = 0$ entonces $R_3(x) = 0$ y por lo tanto

$$p(x) = P_3(x) = -14 + 22\,(x+1) - 10\,(x+1)^2 + (x+1)^3\,.$$