Segundo Parcial de Matemáticas II
Grado Ingeniería Biomédica

ETSII de València. Junio de 2021

Apellidos	Nombre

Instrucciones

1. Comienza poniendo el nombre y apellidos.
2. En la pregunta de Verdadero o Falso marca claramente tu respuesta. En otro caso la pregunta no será puntuada.
3. Excepto en la primera pregunta pon todos los cálculos necesarios.
4. No se puede usar ningún tipo de material de consulta ni asistentes electrónicos.
5. Escribe con bolígrafo azul o negro.
6. El tiempo total es de 2 horas.

Nota final

Puntuación

Ejercicio 1	1	______
	2	______
Ejercicio 2	1	______
	2	______
Ejercicio 3	1	______
	2	______
Ejercicio 4	1	______
	2	______
Ejercicio 5	1	______
	2	______

Ejercicio 1 —`10 puntos: 5 puntos cada apartado`—

1 Indica si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas (no hay que justificar nada).
Las respuestas correctas suman 0.5 puntos y las incorrectas restan 0.25 puntos.

V / **F**	*Si* $f(x) = \sqrt{1+x}$ *entonces* $f^{x)}(0) = \frac{1}{10!}\binom{1/2}{10}$.
V / **F**	$x\operatorname{sen}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.
V / **F**	*La ecuación del plano tangente a la superficie* $z = x^2 + y^2$ *en el punto* $(1,1,2)$ *es* $2x + 2y - z - 2 = 0$.
V / **F**	*Si una serie de Taylor de centro* $a = 1$ *es divergente en* $x = 3$ *y convergente en* $x = -1$ *entonces su radio de convergencia es igual a* 2.
V / **F**	*La longitud de una curva* $y = f(x)$ *para* $x \in [a,b]$ *es* $L(x) = \int_a^b \sqrt{1 - f'(x)^2}dx$.
V / **F**	*Si una serie de potencias es convergente en el punto* $x = 1$ *entonces la serie de potencias de su derivada también convergerá en dicho punto.*
V / **F**	*Si* $f(x,y) = x^2 - y^2$ *entonces* $D_{(1,1)}f(x,y) = \sqrt{2}(x-y)$.
V / **F**	*La suma de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n/2}}{n!}$ *es* $e^{\sqrt{2}}$.
V / **F**	*La suma de la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{3}{n} 7^n$ *es* 3.
V / **F**	*La suma de la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} 3^n$ *es* 2.

2 *Decimos que una función* F *es una primitiva de* f *si* $\boxed{F' = f}$.
Vamos a demostrar que si F *y* G *son dos primitivas de una misma función* f *entonces* $F = G + k$ *siendo* k *una constante. En efecto veamos que la función* $h = F - G$ *es constante. Por ser* F *y* G *primitivas de* f *se tiene que:*

$$\boxed{h' = 0}$$

Vamos entonces a aplicar el $\boxed{\text{Teorema del valor medio}}$ *para demostrar que* h *es constante. Sean* $x < y$ *y demostremos que* $h(x) = h(y)$. *Aplicando el teorema anterior existe*

$$\boxed{z \text{ en el intervalo }]x, y[}$$

de manera que

$$\boxed{h(y) - h(x) = h'(z)(y - x)}$$

Y como $h' = 0$ *entonces* $h(y) - h(x) = 0$ *y por lo tanto* h *es constante.*

Ejercicio 2 —10 puntos: 8 puntos el primer apartado y 2 el segundo—

1 Calcula el dominio de convergencia de la serie $\sum_n \frac{x^n}{5^n n}$.

Solución. *Se trata de una serie de potencias de centro $a = 0$ y $c_n = \frac{1}{5^n n}$ con lo que*

$$R = \big(\lim_n \big|\frac{5^n n}{5^{n+1}(n+1)}\big|\big)^{-1} = 5.$$

$\boxed{x = 5}$ *Diverge por ser la serie armónica.*

$\boxed{x = -5}$ *Converge por el Criterio de Leibniz porque $b_n = \frac{1}{n}$ es una sucesión decreciente con límite cero.*

El dominio de convergencia es entonces

$$D = [-5, 5[$$

2 *Calcula el valor de* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n-1)!} 3^{n+1}$.

Solución. *Haciendo el cambio $k = n - 1$ (es decir $n = k + 1$), cambiando k por n y descomponiendo tenemos:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n-1)!} 3^{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+3}{k!} 3^{k+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{n!} 3^{n+2} = 3^2 \big(\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} 3^n}_{(1)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{n!} 3^n}_{(2)}\big)$$

(1) Como el primer término de la serie ($n = 0$) es cero lo podemos quitar con lo que simplificando, haciendo de nuevo el cambio $k = n - 1$ (es decir $n = k + 1$) y utilizando el desarrollo de la exponencial (con $x = 3$) se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} 3^n = \underbrace{0}_{n=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} 3^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} 3^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} 3^{k+1} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 3^n = 3e^3.$$

(2) Es directamente la exponencial (de nuevo con $x = 3$):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{n!} 3^n = 3e^3.$$

Así

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n-1)!} 3^{n+1} = 3^2 \big(\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} 3^n}_{(1)} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{n!} 3^n}_{(2)}\big) = 9(3e^3 + 3e^3) = 54e^3.$$

Ejercicio 3 —`10 puntos: 6 puntos el primer apartado y 4 el segundo`—

1 Calcula el desarrollo de MacLaurin de la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2+3x}}$, indicando el radio de convergencia de la serie obtenida.

Solución. *Usamos el desarrollo de la serie binomial (con $p = -1/3$) y tenemos*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2+3x}} = \big(2+3x\big)^{-1/3} = \big(2(1+\frac{3x}{2})\big)^{-1/3} = 2^{-1/3}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/3}{n}(\frac{3x}{2})^n,$$

siempre que $\quad |\frac{3x}{2}| < 1 \iff |x| < \frac{3}{2} = R.$

Calculamos los números binomiales:

$$\binom{-1/3}{0} = 1$$

$$\binom{-1/3}{n} = \frac{-\frac{1}{3}(-\frac{1}{3}-1)(-\frac{1}{3}-2)\cdots(-\frac{1}{3}-(n-1))}{n!} = \frac{(-1)^n 1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{3^n n!}.$$

En definitiva:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2^{-1/3}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{3^n n!}(\frac{3x}{2})^n\right) \\ &= \frac{1}{2^{1/3}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{n!}\frac{1}{2^{n+1/3}}x^n, \end{aligned}$$

con radio de convergencia $\quad R = \frac{3}{2}.$

2 *Calcula el valor aproximado de $\alpha = \displaystyle\int_0^{0.05} e^{-t^2}dt$ usando un polinomio de MacLaurin de segundo grado —no hace falta que calcules el error cometido—.*

Solución. *Calculamos el polinomio de MacLaurin de segundo grado de la función:*

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt.$$

Como

$$f'(x) = e^{-x^2} \Longrightarrow f'(0) = 1 \qquad\qquad f''(x) = e^{-x^2}(-2x) \Longrightarrow f''(0) = 0,$$

entonces

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = x,$$

y por lo tanto

$$\alpha = f(0.05) \approx P_2(0.05) = 0.05.$$

Ejercicio 4 —`10 puntos: 8 puntos el primer apartado y 2 el segundo`—

1 Calcula el volumen de la superficie de revolución que se obtiene al girar, alrededor del eje OX, la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x^2+x+1}}$ en el intervalo $[0,1]$.

Solución. *Se trata de calcular la integral:*

$$V = \pi \int_0^1 \Big(\frac{1}{\sqrt{3x^2+x+1}}\Big)^2 dx = \pi \int_0^1 \frac{1}{3x^2+x+1} dx.$$

Se trata de una integral racional con raíces complejas simples pues

$$3x^2+x+1=0 \Longleftrightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1-12}}{6} = \underbrace{\frac{-1}{6}}_{\alpha} \pm \underbrace{\frac{\sqrt{11}}{6}}_{\beta} i.$$

Aplicando la fórmula (sacando factor común el coeficiente director 3*):*

$$V = \pi\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dx}{x^2+\frac{x}{3}+\frac{1}{3}} = \frac{\pi}{3}\frac{1}{\frac{\sqrt{11}}{6}}\left[\mathrm{atan}\Big(\frac{x-\frac{-1}{6}}{\frac{\sqrt{11}}{6}}\Big)\right]_0^1 = \frac{2\pi}{\sqrt{11}}\Big(\mathrm{atan}\frac{7}{\sqrt{11}} - \mathrm{atan}\frac{1}{\sqrt{11}}\Big).$$

2 Calcula $\lim_n \frac{1}{n}\Big(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\ldots+\sqrt{\frac{n}{n}}\Big)$.

Solución.

$$\lim_n \frac{1}{n}\Big(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\ldots+\sqrt{\frac{n}{n}}\Big) = \int_0^1 \sqrt{x}dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Ejercicio 5 —10 puntos: 6 puntos el primer apartado y 4 el segundo—

1 *Considera la función* $f(x,y) = e^x \int_y^{y^2} e^{-t^2} dt$.

(a) Demuestra que f *es diferenciable en el punto* $(1,0)$.
(b) Calcula la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ *en* $(1,0,0)$.
(c) Calcula la derivada direccional máxima de f *en* $(1,0)$.

Solución.
(a) Calculamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \int_y^{y^2} e^{-t^2} dt,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x \big(e^{-(y^2)^2} 2y - e^{-y^2}\big) = e^x \big(e^{-y^4} 2y - e^{-y^2}\big).$$

Ambas funciones son continuas por serlo las exponenciales y porque, según el Teorema Fundamental del Cálculo, la función integral de una función continua es derivable (y en particular continua). Así f *es diferenciable en todo* $\mathbb{R}^2$*, en particular, alrededor del punto* $(1,0)$.
(b) La ecuación del plano tangente es

$$z = \underbrace{f(1,0)}_{0} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)}_{0}(x-1) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)}_{-e}(y-0) \Longleftrightarrow z = -ey.$$

(c) La deridava direccional máxima se da en la dirección del vector gradiente con valor:

$$D_{\nabla f(1,0)} f(1,0) = \|\nabla f(1,0)\| = \|(0,-e)\| = e.$$

2 *Estudia y clasifica los extremos relativos de la función* $f(x) = 3x^2 + (y^2-9)^2$.

Solución. *Calculamos en primer lugar los puntos críticos:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 6x & = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2(y^2-9)2y & = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0, \quad y = \pm 3 \end{cases}$$

En definitiva los puntos críticos son $(0,0)$, $(0,3)$ *y* $(0,-3)$.
Para la clasificación calculamos las derivadas parciales de segundo orden:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) = 6, \quad \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial 6} = 2(y^2-9)2y = 4y^3 - 36y \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) = 12y^2 - 36.$$

Y por lo tanto:

$$\Delta f(0,0) = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -36 \end{vmatrix} < 0, \qquad \Delta f(0,3) = \Delta f(0,-3) = \begin{vmatrix} 6 > 0 & 0 \\ 0 & 72 \end{vmatrix} > 0$$

Así $(0,0)$ *es un punto de silla* *y* $(0,\pm 3)$ *son mínimos.*