ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIEROS INDUSTRIALES VALENCIA

Primer Parcial de Matemáticas II
Grado Ingeniería Biomédica

ETSII de València. Marzo de 2023

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Apellidos	Nombre

Instrucciones

1. Comienza poniendo el nombre y apellidos.
2. En la pregunta de Verdadero o Falso marca claramente tu respuesta. En otro caso la pregunta no será puntuada.
3. Excepto en la primera pregunta pon todos los cálculos necesarios.
4. No se puede usar ningún tipo de material de consulta ni asistentes electrónicos.
5. Escribe con bolígrafo azul o negro.
6. El tiempo total es de 2 horas.

Nota final

Puntuación

Ejercicio 1	1	______
	2	______
Ejercicio 2	1	______
	2	______
Ejercicio 3	1	______
	2	______
Ejercicio 4	1	______
	2	______
Ejercicio 5	1	______
	2	______
	3	______

Ejercicio 1 —`10 puntos: 5 puntos cada apartado`—

1 *Indica si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas (no hay que justificar nada).*

`Pregunta correcta: 0.5 puntos   Pregunta incorrecta: -0.25 puntos   Pregunta en blanco: 0 puntos`

V	**F**	*Si* $1 < e^{-x} < 2$ *entonces* $\log\left(\frac{1}{2}\right) < x < 0$.
V	**F**	*La función* $f(x) = x^6 + 1$ *tiene un punto de inflexión en* $a = 0$.
V	**F**	*La serie* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)(n+2)}$ *as absolutamente convergente.*
V	**F**	*La función* $f(x) = \left\|x^2 - 1\right\|$ *es derivable en* $a = 1$.
V	**F**	$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \left[\frac{1}{x}\right] = 0.$
V	**F**	$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2}.$
V	**F**	*La función* $f(x) = \tan(\|x\|^3) + x^3 + 1$ *es una función impar.*
V	**F**	*La ecuación* $e^{-x} - \operatorname{atan}(x) = 0$ *tiene al menos una raíz en el intervalo* $[0,1]$.
V	**F**	$\displaystyle\lim_{n} \frac{5^{n+1} + 3^n}{2^n - 5^n} = -1.$
V	**F**	*La recta tangente a* $y = [x] + \|x\|$ *en* $a = 3/2$ *es* $y = x + 1$.

2 *Demuestra que si una función tiene derivada negativa en un entorno de un punto entonces la función es decreciente en dicho entorno.*

Demostración. *Como queremos ver que la función es decreciente, si tomamos* x_1 *y* x_2 *en el entorno del punto verificando que* $x_1 < x_2$ *entonces tenemos que demostrar que* $f(x_2) - f(x_1)$ *tiene signo* $\boxed{\text{negativo}}$.

Para ello, aplicamos el $\boxed{\text{Teorema del valor medio}}$ *en el intervalo cerrado* $\boxed{[x_1, x_2]}$ *que nos proporciona un punto* c *(en el intervalo abierto) de forma que se cumple la igualdad:*

$$\boxed{f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)}$$

Como por hipótesis la derivada es negativa entonces $\boxed{f'(c)(x_2 - x_1) \text{ ó } f'(c)}$ *tiene signo negativo y por lo tanto* f *es decreciente, como queríamos demostrar.*

Ejercicio 2 —`10 puntos: 5 puntos cada apartado`—

1 *Calcula el valor de la suma de la serie numérica* $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-2)}$.

Solución. *Se trata de una serie telescópica. La descomposición en fracciones simples será:*

$$\frac{1}{n(n-2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n-2} = \frac{A(n-2)+Bn}{n(n-2)} \Longrightarrow 1 = A(n-2)+Bn \Longrightarrow \begin{cases} n=0: -2A=1 \\ n=2: 2B=1 \end{cases}$$

Con lo que $a_n = \dfrac{-1/2}{n} + \dfrac{1/2}{n-2}$ *y por lo tanto:*

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{-1/2}{3} + \frac{1/2}{1} \\ a_4 &= \frac{-1/2}{4} + \frac{1/2}{2} \\ a_5 &= \frac{-1/2}{5} + \frac{1/2}{3} \\ a_6 &= \frac{-1/2}{6} + \frac{1/2}{4} \\ a_7 &= \frac{-1/2}{7} + \frac{1/2}{5} \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= \frac{-1/2}{n-1} + \frac{1/2}{n-3} \\ a_n &= \frac{-1/2}{n} + \frac{1/2}{n-2} \end{aligned}$$

Sumando todas estas igualdades tenemos:

$$s_n = \frac{1/2}{1} + \frac{1/2}{2} + \frac{-1/2}{n-1} + \frac{-1/2}{n},$$

y tomando límites

$$\lim_n s_n = \frac{1/2}{1} + \frac{1/2}{2} + 0 + 0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

lo que significa que la serie es convergente y suma:

$$\frac{3}{4}.$$

2 *Demuestra que si* $\lim_n (-1)^n n\sqrt{n} a_n = 5$ *entonces* $\displaystyle\sum_n a_n$ *es una serie absolutamente convergente.*

Solución. Como $\lim_n (-1)^n n\sqrt{n} a_n = 5$ tomando módulos

$$\left|\lim_n (-1)^n n\sqrt{n} a_n\right| = |5| \Longrightarrow \lim_n \left|(-1)^n n\sqrt{n} a_n\right| = 5 \Longrightarrow \lim_n n\sqrt{n}|a_n| = 5.$$

Pero este último límite lo podemos escribir

$$\lim_n \frac{|a_n|}{1/n\sqrt{n}} = 5 \neq 0,$$

lo que significa que, aplicando el Criterio de comparación,

$$\sum_n |a_n| \sim \sum_n \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_n \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Y como esta última serie es la armónica generalizada con $p = 3/2 > 1$ es una serie convergente y por lo tanto $\sum_n |a_n|$ es también convergente lo que significa que $\sum_n a_n$ es absolutamente convergente.

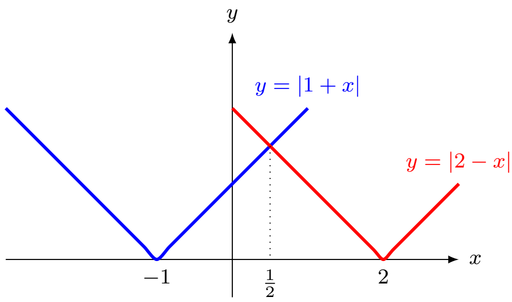
Ejercicio 3 —`10 puntos: 5 puntos cada apartado`—

1 *Calcula, donde sea posible, el valor de la suma de la serie* $\left(\frac{1+x}{2-x}\right)-\left(\frac{1+x}{2-x}\right)^2+\left(\frac{1+x}{2-x}\right)^3-\dots$ *Indica también el intervalo de convergencia.*

Solución. *Se trata de una serie geométrica de razón* $r=-\dfrac{1+x}{2-x}$ *que será convergente si, y sólo si,*

$$|r|=\left|\frac{1+x}{2-x}\right|<1 \Longrightarrow |1+x|<|2-x|.$$

Pero como



la función azul estará por debajo de la roja antes del punto de corte que es:

$$1+x=2-x \Longleftrightarrow x=\frac{1}{2},$$

con lo que el intervalo de convergencia será $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$*, en este caso la suma será:*

$$\left(\frac{1+x}{2-x}\right)-\left(\frac{1+x}{2-x}\right)^2+\left(\frac{1+x}{2-x}\right)^3-\dots=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1+x}{2-x}\right)^n=-\frac{-\frac{1+x}{2-x}}{1+\frac{1+x}{2-x}}=\frac{1+x}{3}.$$

2 *Utiliza la derivada de la función* $f(x)=\cos(x)$ *y la identidad* $\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)=1$ *para demostrar, mediante la regla de la cadena, que la derivada de la función inversa de* f*,* $g(x)=\operatorname{acos}(x)$*, es* $-1/\sqrt{1-x^2}$*.*

Solución. *Como* $g(x)=\operatorname{acos}(x)$ *despejando tenemos:*

$$\cos(g(x))=x.$$

Derivando respecto de x *y aplicando la regla de la cadena:*

$$-\operatorname{sen}(g(x))g'(x)=1.$$

Y despejando:

$$g'(x)=-\frac{1}{\operatorname{sen}(g(x))}.$$

Y como $\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)=1$ *entonces:*

$$g'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(g(x))}}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ejercicio 4 —`10 puntos: 5 puntos cada apartado`—

1 *Un cohete de masa m_1 lleva una carga de combustible de masa m_2, que se quemará de forma constante a razón de b kg/s. La distancia $s(t)$ (en metros) que recorre el cohete en un tiempo t viene dada por*

$$s(t) = ct + \frac{c}{b}(m_1 + m_2 - bt)\log\left(\frac{m_1 + m_2 - bt}{m_1 + m_2}\right),$$

donde $c > 0$ es una constante. Calcula la velocidad instantánea cuando al cohete le quede la mitad del combustible.

Solución. *Se trata de calcular la derivada de la función $s(t)$ en el instante t en el que quede la mitad del combustible. Por una parte:*

$$\begin{aligned} s'(t) &= c + \frac{c}{b}\Big[(-b)\log\left(\frac{m_1 + m_2 - bt}{m_1 + m_2}\right) + (m_1 + m_2 - bt)\,\frac{1}{\frac{m_1 + m_2 - bt}{m_1 + m_2}}\,\frac{-b}{m_1 + m_2}\Big] \\ &= -c\log\left(\frac{m_1 + m_2 - bt}{m_1 + m_2}\right). \end{aligned}$$

Y como el combustible se quema a una razón constante de b kg/s, en un instante t quedarán $m_2 - bt$ kg. De esta manera quedará la mitad del combustible cuando:

$$m_2 - bt = \frac{m_2}{2} \iff t = \frac{m_2}{2b}.$$

Luego la velocidad instantánea será

$$s'\left(\frac{m_2}{2b}\right) = -c\log\left(\frac{m_1 + m_2/2}{m_1 + m_2}\right) = -c\log\left(\frac{2m_1 + m_2}{2m_1 + 2m_2}\right)$$

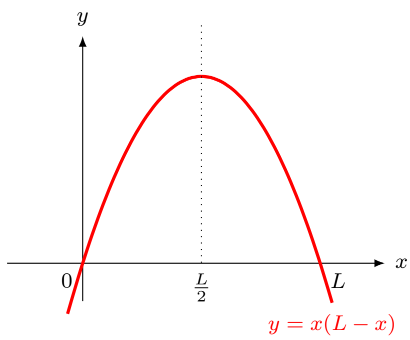
2 *Descompón un número L como suma de dos números positivos de forma que la arcotangente de la suma de los logaritmos neperianos de los dos sumandos sea máxima.*

Solución. *Se trata de escribir $L = x + y$ de manera que*

$$f(x, y) = \operatorname{atan}(\ln(x) + \ln(y)),$$

sea máximo.
Como $L = x + y$ implica que $y = L - x$ se trata entonces de maximizar la función

$$f(x) = \operatorname{atan}(\ln(x) + \ln(L - x)).$$



Pero como la función arcotangente es creciente maximizar $f(x)$ es lo mismo que maximizar

$$g(x) = \ln(x) + \ln(L - x).$$

Y como $g(x) = \ln(x) + \ln(L - x) = \ln(x(L - x))$ de nuevo como la función logaritmo neperiano es una función creciente maximizar la función $g(x)$ es lo mismo que maximizar la función:

$$h(x) = x(L - x),$$

que es una parábola cuyo máximo está en el punto $x = L/2$ (y por tanto $y = L/2$).

Ejercicio 5 —`10 puntos: 3 puntos los dos primeros apartados y 4 puntos el tercero`—
Estudia el carácter de las siguientes series numéricas:

1. $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n}{2^n \log(n)\operatorname{atan}(n)}$.
2. $\displaystyle\sum_n (-1)^n \frac{\log(3n+2)}{\log(3n^2+2)}$.
3. $\displaystyle\sum_n \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$.

Solución.

1. Se trata de una serie alternada. Aplicamos el criterio de Leibniz.
Como las sucesiones $(2^n)_n$, $(\log(n))_n$ y $(\operatorname{atan}(n))_n$ son crecientes entonces:

$$b_n = \frac{1}{2^n \log(n)\operatorname{atan}(n)},$$

es una sucesión decreciente. Y como

$$\lim_n b_n = \lim_n \frac{1}{2^n \log(n)\operatorname{atan}(n)} = 0,$$

entonces la serie converge por el criterio de Leibniz.

2. Como $\displaystyle\lim_n \frac{\log(3n+2)}{\log(3n^2+2)} = \frac{1}{2} \neq 0$ entonces $\displaystyle\lim_n (-1)^n \frac{\log(3n+2)}{\log(3n^2+2)}$ no existe y, en particular, es diferente de cero con lo que la serie diverge por el criterio general de la divergencia.

3. Aplicamos el criterio de D'Alembert:

$$\begin{aligned}
\alpha = \lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_n \left| \frac{\dfrac{(2(n+1))!}{4^{n+1}((n+1)!)^2}}{\dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2}} \right| &= \lim_n \frac{(2(n+1))!}{(2n)!} \frac{4^n}{4^{n+1}} \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} \\
&= \lim_n (2n+2)(2n+1) \frac{1}{4} \frac{1}{(n+1)^2} \\
&= \lim_n \frac{2n+1}{2n+2} = 1.
\end{aligned}$$

D'Alembert no nos permite afirmar nada. Aplicamos el criterio de Raabe:

$$\beta = \lim_n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) n = \lim_n \left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1 \right) n = \lim_n \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1,$$

la serie diverge.