Tercer Control Matemáticas II. GIB

ETSII de València. Mayo de 2022

Apellidos	Nombre	Nota

Problema 1 *Calcula el dominio de convergencia de la serie de potencias* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n n^{0.999999}}(x+5)^n$.

Solución: Centro serie $\boxed{a=-5}$ Radio de convergencia serie $\boxed{R=3}$

¿Converge en el extremo izquierdo `SI/NO`? $\boxed{\text{SI}}$

¿Qué criterio has utilizado? $\boxed{\text{Criterio de Leibniz o serie armónica alternada generalizada}}$

¿Converge en el extremo derecho `SI/NO`? $\boxed{\text{NO}}$

¿Qué criterio has utilizado? $\boxed{\text{Serie armónica generalizada}}$

Dominio de convergencia $\boxed{[-8, 2[}$

`Puntuación: 1 punto los cuadros pequeños y 2.5 los grandes`

Problema 2 *Calcula desarrollo de MacLaurin de la función* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{7+x^3}}$ *indicando el radio de convergencia de la serie obtenida.*

Solución: Se trata de una serie de tipo (`Geométrica, Exponencial, Trigonométrica, Trigonométrica hiperbólica, Logarítmica, Binomial`) $\boxed{\text{Binomial}}$

El radio de convergencia es $\boxed{r=\sqrt[3]{7}}$

El desarrollo es $\boxed{\frac{1}{\sqrt{7}}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\left(\frac{x^3}{7}\right)^n}$

que simplificado sería $\boxed{\frac{1}{\sqrt{7}}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,1\cdot 3\cdot(2n-1)}{n!\,2^n\,7^n}x^{3n}\right)}$

`Puntuación: 2.5 puntos cada apartado`

Problema 3 *Escribe el polinomio $p(x) = x^3 + 7x^2 - 5x + 1$ en potencias de $x + 1$.*

Solución: Escribe el valor de todas las derivadas necesarias (`incluye la de orden cero`):

$$\boxed{p(-1) = 12, \quad p'(-1) = -16, \quad p''(-1) = 8, \quad p'''(-1) = 6}$$

Escribe el polinomio de Taylor que vas a utilizar

$$\boxed{P(x) = 12 - 16(x+1) + \frac{8}{2}(x+1)^2 + \frac{6}{3!}(x+1)^3 = 12 - 16(x+1) + 4(x+1)^2 + (x+1)^3}$$

Justifica por qué el polinomio de Taylor que has calculado, $P(x)$, coincide con $p(x)$

Porque $p(x) = P_3(x) + R_3(x) = P(x) + R_3(x)$ con

$$R_3(x) = \frac{p^{iv)}z}{4!}(x + 1^4),$$

para cierto z entre x y -1. Pero como p es un polinomio de grado 3 entonces $p^{iv)}(x) = 0$ para cualquier x (en particular para el z) con lo que $R_3(x) = 0$ y en consecuencia:

$$p(x) = P(x) + 0 = P(x).$$

`Puntuación: 3 puntos + 4 puntos + 3 puntos`

Problema 4 *Escribe la aproximación cuadrática en el origen de la función $f(x) = e^x \mathrm{atan}(x)$ así como la fórmula del error si quisieras aproximar el valor de $f(0.1)$.*

Solución: Escribe el valor de todas las derivadas necesarias (`incluye la de orden cero`):

$$\boxed{f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 2}$$

Escribe la aproximación cuadrática

$$\boxed{q(x) = x + x^2}$$

El error sería entonces

$$\boxed{R(0.1) = \frac{f'''(z)}{6}(0.1)^3 \text{ con } f'''(z) = e^z\left(\mathrm{atan} z + 3(1+z^2)^{-1} - (2+6z)(1+z^2)^{-2} + 8z^2(1+z^2)^{-3}\right)}$$

para un cierto valor de z entre $\boxed{a = 0}$ y $\boxed{x = 0.1}$.

`Puntuación: 3 puntos los cuadros grandes y 0.5 los pequeños`