

Apellidos	Nombre

<p>Instrucciones</p> <ol style="list-style-type: none">1 Comienza poniendo el nombre y apellidos.2 En la pregunta de Verdadero o Falso marca claramente tu respuesta. En otro caso la pregunta no será puntuada.3 Excepto en la primera pregunta pon todos los cálculos necesarios.4 No se puede usar ningún tipo de material de consulta ni asistentes electrónicos.5 Escribe con bolígrafo azul o negro.6 El tiempo total es de 2 horas.

Nota final

Puntuación	
Ejercicio 1	1 _____ 2 _____
Ejercicio 2	1 _____ 2 _____
Ejercicio 3	1 _____ 2 _____
Ejercicio 4	1 _____ 2 _____
Ejercicio 5	1 _____ 2 _____

Ejercicio 1 —10 puntos: 5 puntos cada apartado—

- 1 Indica si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas (no hay que justificar nada).
Las respuestas correctas suman 0.5 puntos y las incorrectas restan 0.25 puntos.

V	Si $f(x) = \sqrt{1+x}$ entonces $f^{(xi)}(0) = 11! \binom{1/2}{11}$.
F	

V	Si $f(x) = \cos x$ entonces $f^{(x)}(0) = \frac{-1}{10!}$.
F	

V	La ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 - y^2$ en el punto $(1, 1, 0)$ es $2x - 2y - z = 0$.
F	

V	Si una serie de Taylor de centro $a = 1$ es divergente en $x = 3$ y convergente en $x = -1$ entonces el radio de convergencia de la serie derivada es 2.
F	

V	$\int_0^\pi \cos^2(x) dx = \frac{\pi}{2}$.
F	

V	Para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $\text{sh}^2(x) - \text{ch}^2(x) = 1$.
F	

V	Si $f(x, y) = x^2 - y^2$ entonces $D_{(1,-1)} f(x, y) = \sqrt{2}(x + y)$.
F	

V	La suma de la serie $\sum_{n=1}^\infty \frac{2^{n/3}}{n!}$ es $e^{\sqrt{3}}$.
F	

V	La suma de la serie $\sum_{n=1}^\infty \binom{2}{n} 3^n$ es 15.
F	

V	La suma de la serie $\sum_{n=0}^\infty \binom{1/2}{n} 3^n$ es 2.
F	

- 2 El Método del descenso del gradiente asegura que si f es una función diferenciable en (a, b) entonces de todas las derivadas direccionales la **menor** se obtiene tomando como vector **unitario**:

$\mathbf{u}_{\min} =$

Para la demostración usamos en primer lugar que como f es diferenciable en (a, b) entonces la derivada direccional la podemos escribir a partir del vector gradiente usando la fórmula

$D_{\mathbf{u}_{\min}} f(a, b) =$

Pero el producto escalar en \mathbb{R}^2 se puede escribir en función del ángulo y por lo tanto la derivada direccional la podemos reescribir como

$D_{\mathbf{u}_{\min}} f(a, b) =$

Y como el vector \mathbf{u}_{\min} es un vector unitario entonces el menor valor se obtiene cuando el coseno vale y por lo tanto el valor de la derivada direccional es

$D_{\mathbf{u}_{\min}} f(a, b) =$

Ejercicio 2 —10 puntos: 5 puntos cada apartado—

1 Calcula el dominio de convergencia de la serie $\sum_n \frac{x^{3n}}{7^n \sqrt{n}}$.

2 Calcula el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n-1)!} 3^{n+1}$.

Ejercicio 4 —10 puntos: 5 puntos cada apartado—

- 1 Calcula el volumen de la superficie encerrada por las superficies de ecuaciones $z = x^2 + y^2$ y $(2 - z)^2 = x^2 + y^2$ y exterior a $x^2 + y^2 = (1/2)^2$ con $z \leq 2$.

- 2 Calcula $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$.

Ejercicio 5 —10 puntos: 6 puntos el primer apartado y 4 el segundo—

1 Considera la función $f(x, y) = e^x \int_{y^3}^{y^2} e^{-t^2} dt$.

- (a) Demuestra que f es diferenciable en el punto $(1, 0)$.
- (b) Calcula la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en $(1, 0, 0)$.
- (c) Calcula la derivada direccional máxima de f en $(1, 0)$.

2 Estudia y clasifica los extremos relativos de la función $f(x, y) = 5x^2 + (y^2 - 16)^2$.

