ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIEROS INDUSTRIALES VALENCIA

Segundo Parcial de Matemáticas II
Grado Ingeniería Biomédica

ETSII de València. Junio de 2024

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Apellidos	Nombre

Instrucciones

1. Comienza poniendo el nombre y apellidos.
2. En la pregunta de Verdadero o Falso marca claramente tu respuesta. En otro caso la pregunta no será puntuada.
3. Excepto en la primera pregunta y en el primer apartado de la quinta pon todos los cálculos necesarios.
4. No se puede usar ningún tipo de material de consulta ni asistentes electrónicos.
5. Escribe con bolígrafo azul o negro.
6. El tiempo total es de 2 horas.

Nota final

Puntuación

Ejercicio 1	1	______
	2	______
Ejercicio 2	1	______
	2	______
Ejercicio 3	1	______
	2	______
Ejercicio 4	1	______
	2	______
	3	______
Ejercicio 5	1	______
	2	______

Ejercicio 1 —`10 puntos: 5 puntos cada apartado`—

1 Indica si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas (no hay que justificar nada). **Las respuestas correctas suman 0.5 puntos y las incorrectas restan 0.25 puntos.**

V / **F** *Si* $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ *entonces* $f^{\mathrm{xi})}(0) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{3}-9\right)\left(\frac{1}{3}-10\right)$.

V / **F** *Si* $f(x) = \log(x)$ *entonces* $f^{\mathrm{x})}(0) = \frac{-1}{10}$.

V / **F** *Si una serie de Taylor de centro* $a = 1$ *es convergente en* $x = -1$ *y divergente en* $x = 3$ *entonces el dominio de convergencia de la serie derivada es* $[-1, 3[$.

V / **F** *Si una serie de Taylor de centro* $a = 1$ *es divergente en* $x = 3$ *y convergente en* $x = 0$ *entonces el radio de convergencia de la serie derivada es mayor o igual que* 1.

V / **F** $\int_0^{\pi} \mathrm{sen}^2(x)dx = \frac{\pi}{2}$.

V / **F** *Para todo* $x \in \mathbb{R}$ *se verifica que* $\mathrm{sh}^2(x) + \mathrm{ch}^2(x) = \mathrm{ch}(2x)$.

V / **F** *Si* $f(x,y) = x^2 - y^2$ *entonces* $D_{(1,-1)}f(x,y) = \sqrt{2}(x+y)$.

V / **F** *La suma de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{10}{n}$ *es* $2^{10} - 1$.

V / **F** *La suma de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{-2}{n} 3^n$ *es* $-\frac{15}{16}$.

V / **F** *La suma de la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/3}{n}$ *es* $\sqrt[3]{2}$.

2 *El Teorema Fundamental del Cálculo I (o* **Regla de Barrow***) asegura que si* F *es una primitiva de una función continua,* f*, en* $[a, b]$ *entonces:*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \qquad\qquad}$$

Para la demostración tomamos una partición $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *del intervalo* $[a, b]$ *de forma que* $\boxed{x_0 = \qquad \text{y que } x_n = \qquad}$. *Aplicando entonces el Teorema* $\boxed{\qquad\qquad}$ *en cada intervalo* $]x_{k-1}, x_k[$ *y a la función* $\boxed{\qquad}$ *podemos encontrar unos puntos* $x_k^* \in]x_{k-1}, x_k[$ *de forma que:*

$$\boxed{F(x_k) - F(x_{k-1}) = \qquad\qquad} \quad \text{(usa sólo } F\text{),}$$

que teniendo en cuenta que F *es una primitiva de* f *podemos escribir también:*

$$\boxed{F(x_k) - F(x_{k-1}) = \qquad\qquad} \quad \text{(aquí usa } f\text{).}$$

De esta manera tenemos unos rectángulos que tendrán bases de longitudes $\boxed{\qquad}$ *y alturas* $\boxed{\qquad}$. *El área de cada rectángulo será* $A_k = \boxed{\qquad}$. *Pero entonces la suma de las áreas de estos rectángulos aproxima a la integral y el límite será el valor de dicha integral. Es decir:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} A_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \big(F(x_k) - F(x_{k-1})\big).$$

Y para obtener el resultado basta tener en cuenta que $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \big(F(x_k) - F(x_{k-1})\big) = \qquad}$

Ejercicio 2 —`10 puntos: 8 puntos el primer apartado y 2 el segundo`—

1. Calcula el dominio de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_n \frac{x^{3n}}{7^n n^2}$.

2 *Calcula, usando un polinomio de MacLaurin de segundo grado, una aproximación de* $\cos(0.1)$ *(no hace falta que estimes el error cometido).*

Ejercicio 3 —`10 puntos: 5 puntos cada apartado`—

1. Calcula el desarrollo de MacLaurin de la función $f(x) = \dfrac{1}{(2+5x)^3}$, indicando el radio de convergencia de la serie obtenida.

2 Calcula $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(k/n)^2 + (k/n) + 1}.$

Ejercicio 4 —`10 puntos: 4 puntos los dos primeros apartados y 2 el tercero`—
La parodoja de la copa de Martini con hielo. El cono de una copa de Martini tiene $6cm$ de radio y $8cm$ de altura. Si la copa tiene en su interior un cubito de hielo esférico de radio $1cm$:

1. Calcula, mediante integrales, el volumen del cubito de hielo.

2. Escribe la ecuación del cono de la copa de Martini y calcula, mediante integrales, el volumen de la copa (sin el cubito de hielo) si la rellenamos hasta una altura $z = h$.

3. Deduce, de los apartados anteriores, que

   (a) el volumen total de la copa de Martini (sin el cubito de hielo) es $V_T = 8 \cdot 6^2 \cdot \pi/3 = 96\pi$, y

   (b) la altura a la que hay que rellenar la copa con el cubito dentro, para que esté a la mitad de su contenido total, es $H = \sqrt[3]{148 \cdot 16/9} \approx 6.41$.

Ejercicio 5 —`10 puntos: 2 puntos el primer apartado y 8 el segundo`—

1 *Escribe la ecuación (o ecuaciones) que describan las siguientes figuras geométricas en* $\mathbb{R}^3$*:*

(1) Cono de vértice en $(0,0,1)$ *y de sección a la altura del plano* $z=0$ *una circunferencia de centro* $(0,0)$ *y radio* 1*:*

(2) Paraboloide elíptico de vértice en $(0,0,1)$ *y de sección a la altura del plano* $z=0$ *una circunferencia de centro* $(0,0)$ *y radio* 1*:*

(3) Cilindro de centro en el punto $(1,-1,0)$ *y de sección (perpendicular al eje OZ) una circunferencia de radio* 2*:*

(4) Circunferencia de centro $(-1,2,0)$ *y radio* 5 *situada en el plano* OXY*:*

2 *Considera la función* $f(x,y) = (x-1+y^2)\displaystyle\int_0^y e^{-t^2}\,dt$.

(a) Demuestra que f *es diferenciable en el punto* $(0,0)$*.*
(b) Calcula la ecuación del plano tangente a la superficie $z=f(x,y)$ *en* $(0,0,0)$*.*
(c) Calcula la derivada direccional mínima de f *en* $(0,0)$*.*
(d) Estudia y clasifica el extremo relativo de f*. (***Ayuda: para la clasificación NO necesitas calcular TODAS las derivadas parciales de segundo orden***).*