

S9 Propuestos Semana 9

Ejercicio 23. Mediante descomposición en fracciones simples tenemos:

- a) $\int \frac{x}{x^2 + x - 2} dx = \int \left(\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} \right) dx = \int \left(\frac{2/3}{x+2} + \frac{1/3}{x-1} \right) dx = \frac{2}{3} \log(x+2) + \frac{1}{3} \log(x-1)$
- b) $\int \frac{5x^2 + 3x - 2}{x^2(x+2)} dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2} \right) dx = \int \left(\frac{2}{x} + \int \frac{-1}{x^2} + \int \frac{3}{x+2} \right) dx = 2 \log(x) - \frac{1}{x} + 3 \log(x+2)$
- c) $\int \frac{2x^2 + x + 1}{x(x^2 + 1)} dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{Mx + N}{x^2 + 1} \right) dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = \log(x) + \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) + \arctan(x)$
- e) Haz la división $\frac{x^2}{x+4} = x - 4 + \frac{16}{x+4}$: $\int \frac{x^2}{x+4} dx = \int \left(x - 4 + \frac{16}{x+4} \right) dx = \frac{x^2}{2} - 4x + 16 \log(x+4)$

Ejercicio 23. a) Haz el cambio de variable $t = \sin(x)$ para transformar la integral en racional, luego la descomposición en fracciones simples y finalmente deshaz el cambio:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)(1 + \sin^2(x))} dx &= \int \frac{1}{t^2(1+t^2)} dt = \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{Mt + N}{t^2 + 1} \right) dt \\ &= \int \frac{1}{t^2} dt + \int \frac{-1}{t^2 + 1} dt = -\frac{1}{t} - \arctan(t) = -\frac{1}{\sin(x)} - \arctan(\sin(x)) \end{aligned}$$

b) Igual pero con $t = e^x$:

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3e^x + 2} dx &= \int \frac{t}{t^2 + 3t + 2} dt = \int \left(\frac{A}{t+2} + \frac{B}{t-1} \right) dt \\ &= \int \left(\frac{2}{t+2} + \frac{-1}{t-1} \right) dt = 2 \log(t+2) - \log(t-1) = 2 \log(e^x + 2) - \log(e^x - 1) \end{aligned}$$

Ejercicio 25. a) Haz primero la división y luego la descomposición en fracciones simples:

$$\int_0^1 \frac{x^2 - 4x - 10}{x^2 - x - 6} dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{-2/5}{x+2} + \frac{-13/5}{x-3} \right) dx = \left[x - \frac{2}{5} \log|x+2| - \frac{13}{5} \log|x-3| \right]_0^1 = 1 + \log\left(\frac{9}{4} \sqrt[5]{\frac{3}{2}}\right)$$

b) Haz el cambio $x = t^2$ (incluye los extremos de integración), luego la división y por último la descomposición en fracciones simples:

$$\int_9^{16} \frac{\sqrt{x}}{x-4} dx = \int_3^4 \frac{2t^2}{t^2-4} dt = 2 \int_3^4 \left(1 + \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2} \right) dt = 2 [t + \log|t-2| - \log|t+2|]_3^4 = 2 + \log(25/9)$$

Ejercicio 27.

$$\int_0^1 \left(\sqrt{x+1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \left[\frac{(x+1)^{3/2}}{3/2} - \log|x+1| \right]_0^1 = \frac{1}{3} (-2 + 4\sqrt{2} - \log 8) \approx 0.52580$$