ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR INGENIEROS INDUSTRIALES VALENCIA

# Primer Parcial de Matemáticas II
# Grado Ingeniería Biomédica

ETSII de València. Marzo de 2022

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

| Apellidos | Nombre |
|---|---|
| | |

**Instrucciones**

1. Comienza poniendo el nombre y apellidos.
2. En la pregunta de Verdadero o Falso marca claramente tu respuesta. En otro caso la pregunta no será puntuada.
3. Excepto en la primera pregunta pon todos los cálculos necesarios.
4. No se puede usar ningún tipo de material de consulta ni asistentes electrónicos.
5. Escribe con bolígrafo azul o negro.
6. El tiempo total es de $2$ horas.

**Nota final**

**Puntuación**

| | | |
|---|---|---|
| **Ejercicio 1** | 1 | ______ |
| | 2 | ______ |
| **Ejercicio 2** | | ______ |
| **Ejercicio 3** | 1 | ______ |
| | 2 | ______ |
| **Ejercicio 4** | 1 | ______ |
| | 2 | ______ |
| **Ejercicio 5** | 1 | ______ |
| | 2 | ______ |
| | 3 | ______ |
| | 4 | ______ |

**Ejercicio 1** —10 puntos: 5 puntos cada apartado—

**1** *Indica si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas (no hay que justificar nada).*

Pregunta correcta: 0.5 puntos   Pregunta incorrecta: -0.25 puntos   Pregunta en blanco: 0 puntos

| | | |
|---|---|---|
| **V** | **F** | *La serie* $\sum_n \frac{1}{n(-1)^n}$ *es absolutamente convergente.* |
| **V** | **F** | *La sucesión* $\left(\frac{1}{\log(n!)}\right)_n$ *es decreciente* |
| **V** | **F** | *Si* $1 \leq x < 2$ *entonces* $\left[\log(x)\right] = 0$. |
| **V** | **F** | *La función* $f(x) = x\|x\|$ *es derivable en el origen.* |
| **V** | **F** | $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(3n^2-2n)}{\log(2n^2+n)} = \frac{3}{2}$. |
| **V** | **F** | $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$. |
| **V** | **F** | *La función* $f(x) = \operatorname{sen}(\|x\|^3) + x^3 + 1$ *es una función impar.* |
| **V** | **F** | *Si* $\lim_{n\to\infty} 3^n a_n = 1$ *entonces* $\sum_n a_n$ *es convergente.* |
| **V** | **F** | $\lim_{x\to+\infty} \frac{7^x + 3x}{7^{x-1} + 5x} = 7$. |
| **V** | **F** | *La recta tangente a* $y = [x]$ *en* $a = 3/2$ *es* $y = 1$. |

**2** *Demuestra que si una función tiene derivada positiva en un entorno de un punto entonces la función es creciente en dicho entorno.*

**Demostración**. *Como queremos ver que la función es creciente, si tomamos* $x_1$ *y* $x_2$ *en el entorno del punto verificando que* $x_1 < x_2$ *entonces tenemos que demostrar que* $f(x_2) - f(x_1)$ *tiene signo* **positivo** .

*Para ello, aplicamos el* **Teorema del valor medio** *en el intervalo cerrado* $[x_1, x_2]$ *que nos proporciona un punto* $c$ *(en el intervalo abierto) de forma que se cumple la igualdad:*

$$\boxed{f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)}$$

*Como por hipótesis la derivada es positiva entonces* $f'(c)(x_2 - x_1)$ ó $f'(c)$ *tiene signo positivo y por lo tanto* $f$ *es creciente como queríamos demostrar.*

**Ejercicio 2** *Calcula el valor de la suma de la serie numérica* $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-1)}$.

**Solución**. Se trata de una serie telescópica.
Hacemos la descomposición en fracciones simples:

$$a_n = \frac{1}{n(n^2-1)} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n} + \frac{C}{n+1} = \frac{An(n+1)+B(n-1)(n+1)+C(n-1)n}{n(n^2-1)}.$$

De donde: $1 = An(n+1)+B(n-1)(n+1)+C(n-1)n$,
y por lo tanto

$$\begin{aligned} n=-1 &: \quad 1 = 2C \Longrightarrow C = 1/2 \\ n=0 &: \quad 1 = -B \Longrightarrow B = -1 \\ n=1 &: \quad 1 = 2A \Longrightarrow A = 1/2. \end{aligned}$$

De esta manera

$$a_n = \frac{1/2}{n-1} + \frac{-1}{n} + \frac{1/2}{n+1}.$$

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1/2}{2} + \frac{-1}{3} + \frac{1/2}{4} \\ a_4 &= \frac{1/2}{3} + \frac{-1}{4} + \frac{1/2}{5} \\ a_6 &= \frac{1/2}{4} + \frac{-1}{5} + \frac{1/2}{6} \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= \frac{1/2}{n-2} + \frac{-1}{n-1} + \frac{1/2}{n} \\ a_n &= \frac{1/2}{n-1} + \frac{-1}{n} + \frac{1/2}{n+1} \end{aligned}$$

Sumando todas las igualdades tenemos

$$a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = \frac{1/2}{2} + \frac{-1}{3} + \frac{1/2}{3} + \frac{1/2}{n} + \frac{-1}{n} + \frac{1/2}{n+1},$$

con lo que

$$\begin{aligned} \lim_n s_n &= \lim_n \left(a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n\right) \\ &= \lim_n \left(\frac{1/2}{2} + \frac{-1}{3} + \frac{1/2}{3} + \frac{1/2}{n} + \frac{-1}{n} + \frac{1/2}{n+1}\right) \\ &= \frac{1/2}{2} + \frac{-1}{3} + \frac{1/2}{3} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Así la serie es convergente y suma $1/12$.

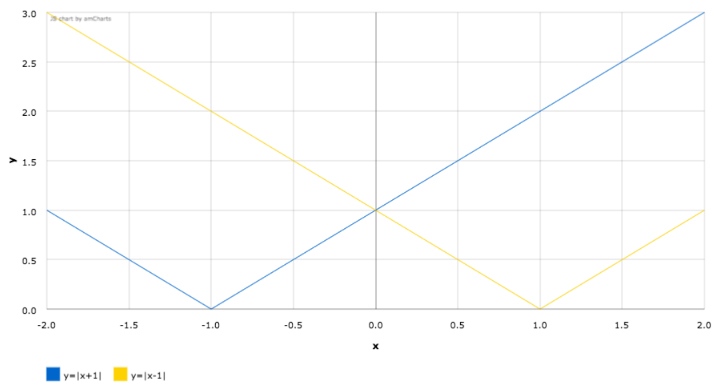
**Ejercicio 3** —`10 puntos: 5 puntos cada apartado`—

**1** *Calcula, donde sea posible, el valor de la suma de la serie* $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3-\ldots$

**Solución**. *Se trata de una serie geométrica de razón* $r=-\dfrac{1+x}{1-x}$ *que será convergente si, y sólo si,*

$$|r|=\left|\frac{1+x}{1-x}\right|<1 \Longleftrightarrow |x+1|<|x-1| \Longleftrightarrow x<0,$$

*puesto que:*




*En este caso la suma será:*

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3-\ldots=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1+x}{1-x}\right)^n=-\frac{-\dfrac{1+x}{1-x}}{1+\dfrac{1+x}{1-x}}=\frac{1+x}{2}.$$

**2** *Calcula la ecuación de la recta tangente en el origen de la función*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

**Solución**. *La ecuación de la recta tangente en el origen es*

$$y-f(0)=f'(0)(x-0).$$

*Por una parte* $f(0)=0$ *y por otra, aplicando la definición de derivada y la regla de l'Hôpital:*

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}{x^3}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)+x(-\operatorname{sen}(x))-\cos(x)}{3x^2}\\ &= -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\\ &= -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

*En definitiva la ecuación pedida es:*

$$y=-\frac{1}{3}x.$$

**Ejercicio 4** —`10 puntos: 5 puntos cada apartado`—

**1** *Estudia el carácter de la serie* $\sum_n (-1)^n \frac{n^n \log(3n+2)}{3^n n!}$.

**Solución**. *Aplicamos el criterio del cociente de D'Alembert:*

$$\alpha = \lim_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_n \frac{3^n\ (n+1)^{n+1} \log(3n+5)\ n!}{3^{n+1}\ n^n \log(3n+2)\ (n+1)!} = \frac{1}{3} \lim_n \frac{\log(3n+5)}{\log(3n+2)} \lim_n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n.$$

*Resolvemos la indeterminación aplicando la Fórmula de Euler:*

$$\alpha = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot\ e^{\lim_n (\frac{n+1}{n} - 1)n} = \frac{1}{3} e.$$

*Como* $\alpha < 1$ *entonces la serie converge (de hecho absolutamente).*

**2** *Estudia el carácter de la serie* $\sum_n \frac{(-1)^n}{2^n \operatorname{atan}(n)}$.

**Solución**. *Se trata de una serie alternada. Aplicamos el criterio de Leibniz. Como las sucesiones* $(2^n)_n$ *y* $(\operatorname{atan} n)_n$ *son crecientes entonces:*

$$b_n = \frac{1}{2^n \operatorname{atan}(n)}$$

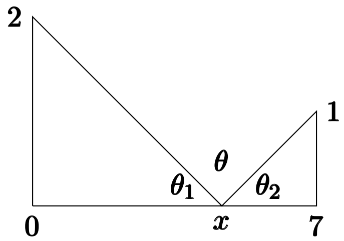
*es una sucesión decreciente. Y como*

$$\lim_n b_n = \lim_n \frac{1}{2^n \operatorname{atan}(n)} = 0,$$

*entonces la serie converge por el criterio de Leibniz.*

**Ejercicio 5** —`10 puntos: 2.5 puntos cada apartado`—

*¿Donde colocarías el punto $x$ para que el ángulo $\theta$ sea lo más grande posible?*




1. *Calcula primero el valor de $\tan(\theta_1)$ y de $\tan(\theta_2)$ en función de $x$.*

2. *Ten en cuenta que $\theta_1 + \theta_2 + \theta = \pi$ y la fórmula*

$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan(\theta_1) + \tan(\theta_2)}{1 - \tan(\theta_1)\tan(\theta_2)},$$

*para demostrar que $\theta(x) = \operatorname{atan}(\frac{14 - x}{x^2 - 7x + 2})$.*

3. *Explica por qué para calcular el máximo de $\theta(x)$ es suficiente con calcular el máximo de*

$$\phi(x) = \frac{14 - x}{x^2 - 7x + 2}.$$

4. *Calcula finalmente el máximo de $\phi(x)$ (no hace falta que compruebes que se trata de un máximo).*

**Solución**. *Aplicando trigonometría tenemos que* $\tan(\theta_1) = \frac{2}{x}$ *y* $\tan(\theta_2) = \frac{1}{7 - x}$ *con lo que aplicando la fórmula tenemos que:*

$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\frac{2}{x} + \frac{1}{7-x}}{1 - \frac{2}{x}\frac{1}{7-x}} = \frac{14 - x}{-x^2 + 7x - 2}.$$

*Pero como* $\tan(\theta_1 + \theta_2) = \tan(\pi - \theta) = -\tan(\theta)$ *entonces*

$$-\tan(\theta) = \frac{14 - x}{-x^2 + 7x - 2} \quad \Longrightarrow \quad \theta(x) = \operatorname{atan}(\frac{14 - x}{x^2 - 7x + 2}).$$

*Y como la arcotangente es una función creciente el máximo de $\theta(x) = \operatorname{atan}(\phi(x))$ se dará cuando $\phi(x)$ sea máximoAsí pues se trata de calcular los extremos de la función $\phi(x)$ para lo que calculamos la derivada:*

$$\phi'(x) = \frac{(-1)(x^2 - 7x + 2) - (14 - x)(2x - 7)}{(x^2 - 7x + 2)^2} = \frac{x^2 - 28x + 96}{(x^2 - 7x + 2)^2},$$

*que valdrá cero si:*

$$x^2 - 28x + 96 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{28 \pm \sqrt{400}}{2} = 14 \pm 10.$$

*Y como $x \in [0, 7]$ nos quedamos con*

$$x = 4$$