Control Matemáticas II. GIB

E.T.S.I.I. de València. Mayo de 2018

Apellidos	Nombre	Nota

Problema 1 *Calcula el dominio de convergencia de la serie de potencias* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x-3)^n$.

Solución. Serie de potencias de centro $a = 3$ y $c_n = 1/n$. Como el radio de convergencia es

$$R = \left(\lim_n \frac{n+1}{n}\right)^{-1} = 1,$$

la serie de potencias converge al menos en $]2,4[$. En $x = 2$ tenemos una serie alternada que converge (por Leibniz) y en $x = 4$ tenemos la serie armónica que es divergente. En definitiva el dominio de convergencia es el intervalo $[2,4[$.

Problema 2 *Calcula desarrollo en serie de potencias de la función* $f(x) = \frac{1}{9+x^2}$ *indicando el radio de convergencia de la serie obtenida.*

Solución. Utilizando la serie geométrica tenemos:

$$f(x) = \frac{1}{9+x^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{x^2}{9})} = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{x^2}{9})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{9^{n+1}} x^{2n},$$

siempre que $\left|-\frac{x^2}{9}\right| < 1$ es decir si $|x| < \sqrt{9} = 3$ y por lo tanto el radio de convergencia es $R = 3$.

Problema 3 *Calcula el valor de las siguientes sumas:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n}}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\pi/4)^{2n}}{(2n+1)!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} 5^{-n}.$$

Solución.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{3^2}\right)^n = \frac{1}{1-(-1/9)} = \frac{9}{10}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{n!} = 3^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!} = \frac{1}{3}e^3.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\pi/4)^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{1}{\pi/4}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\pi/4)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{4}{\pi}\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} 5^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (\frac{1}{5})^n = (1+\frac{1}{5})^{-1/2} = \sqrt{\frac{5}{6}}.$$

Problema 4 *Escribe el polinomio* $p(x) = x^3 + 7x^2 - 5x + 1$ *en potencias de* $x + 1$.

Solución. Calculamos el polinomio de Taylor de $p(x)$ de grado 3 centrado en $a = -1$:

$$P_3(x) = 12 - 16\,(x+1) + 4\,(x+1)^2 + (x+1)^3\,.$$

Pero como $p(x) = P_3(x) + R_3(x)$, usando la fórmula del resto de Lagrange $R_3(x) = \frac{p^{iv)}(z)}{4!}(x+1)^4$ para cierto z entre $a = -1$ y x. Y como $p^{iv)}(x) = 0$ entonces $R_3(x) = 0$ y por lo tanto

$$p(x) = P_3(x) = 12 - 16\,(x+1) + 4\,(x+1)^2 + (x+1)^3\,.$$