

Apellidos	Nombre

Instrucciones
<ol style="list-style-type: none"><li>1 Comienza poniendo el nombre y apellidos.</li><li>2 En la pregunta de Verdadero o Falso marca claramente tu respuesta. En otro caso la pregunta no será puntuada.</li><li>3 Excepto en la primera pregunta pon todos los cálculos necesarios.</li><li>4 No se puede usar ningún tipo de material de consulta ni asistentes electrónicos.</li><li>5 Escribe con bolígrafo azul o negro.</li><li>6 El tiempo total es de 2 horas.</li></ol>

Nota final

Puntuación	
<b>Ejercicio 1</b>	<b>1</b> _____
	<b>2</b> _____
<b>Ejercicio 2</b>	<b>1</b> _____
	<b>2</b> _____
<b>Ejercicio 3</b>	<b>1</b> _____
	<b>2</b> _____
<b>Ejercicio 4</b>	<b>1</b> _____
	<b>2</b> _____
<b>Ejercicio 5</b>	<b>1</b> _____
	<b>2</b> _____
	<b>3</b> _____



**Ejercicio 1** —10 puntos: 5 puntos cada apartado—

**1** Indica si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas (no hay que justificar nada).

Pregunta correcta: 0.5 puntos Pregunta incorrecta: -0.25 puntos Pregunta en blanco: 0 puntos

**V**  
**F**

Si  $f(x) = 7U(x + 3) - 3U(x - 2)$  entonces  $f(3) = 4$ .

**V**  
**F**

Si  $1 \leq x < 2$  entonces  $\lceil \log(x) \rceil = 0$ .

**V**  
**F**

La sucesión  $(\frac{1}{e^{n!}})_n$  es decreciente.

**V**  
**F**

La función  $f(x) = |x^2 - 1|$  es derivable en  $a = -1$ .

**V**  
**F**

Si  $1 < \sqrt{\operatorname{atan}(-x)} < \sqrt{\frac{\pi}{2}}$  entonces  $x < -\frac{\pi}{4}$ .

**V**  
**F**

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$ .

**V**  
**F**

La función  $f(x) = \operatorname{atan}(x^5) + \operatorname{sen}(x) + x|x|$  es una función impar.

**V**  
**F**

La ecuación  $\log(x) - \operatorname{atan}(x) = 0$  tiene al menos una raíz en el intervalo  $[1, e^3]$ .

**V**  
**F**

$\lim_n \frac{5^{n+1} + n}{n - 5^n} = -5$ .

**V**  
**F**

La recta tangente a  $y = \lceil x \rceil + U(x - 3) + x$  en  $a = 3/2$  es  $y = x - 1$ .

**2** Demuestra que si una función tiene derivada negativa en un entorno de un punto entonces la función es decreciente en dicho entorno.

**Demostración.** Como queremos ver que la función es decreciente, si tomamos  $x_1$  y  $x_2$  en el entorno del punto verificando que  $x_1 < x_2$  entonces tenemos que demostrar que  $f(x_2) - f(x_1)$  tiene signo

**negativo**.

Para ello, aplicamos el **Teorema del valor medio** en el

intervalo cerrado  $[x_1, x_2]$  que nos proporciona un punto  $c$ , en el intervalo abierto, de manera que se verifica la igualdad:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Como por hipótesis la derivada es negativa entonces  **$f'(c)(x_2 - x_1)$  ó  $f'(c)$**  tiene signo negativo y por lo tanto  $f$  es decreciente, como queríamos demostrar.

**Ejercicio 2** —10 puntos: 5 puntos cada apartado—

1 Calcula el valor de la suma de la serie numérica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ .

**Solución.** Se trata de una serie telescópica. La descomposición en fracciones simples será:

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} = \frac{A(n+2) + Bn}{n(n+2)} \implies 1 = A(n+2) + Bn$$

$$\implies \begin{cases} n=0 : 2A = 1 \\ n=-2 : -2B = 1 \end{cases}$$

Con lo que  $a_n = \frac{1/2}{n} + \frac{-1/2}{n+2}$  y por lo tanto:

$$a_1 = \frac{1/2}{1} + \frac{-1/2}{3}$$

$$a_2 = \frac{1/2}{2} + \frac{-1/2}{4}$$

$$a_3 = \frac{1/2}{3} + \frac{-1/2}{5}$$

$$a_4 = \frac{1/2}{4} + \frac{-1/2}{6}$$

$$a_5 = \frac{1/2}{5} + \frac{-1/2}{7}$$

⋮

$$a_{n-1} = \frac{1/2}{n-1} + \frac{-1/2}{n+1}$$

$$a_n = \frac{1/2}{n} + \frac{-1/2}{n+2}$$

Sumando todas estas igualdades tenemos:

$$s_n = \frac{1/2}{1} + \frac{1/2}{2} + \frac{-1/2}{n+1} + \frac{-1/2}{n+2},$$

y tomando límites

$$\lim_n s_n = \frac{1/2}{1} + \frac{1/2}{2} + 0 + 0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

lo que significa que la serie es convergente y suma:

$$\frac{3}{4}.$$

2 Demuestra que si  $\lim_n (-1)^n \frac{3^n n!}{n^n \log(3n+2)} a_n = 7$  entonces  $\sum_n a_n$  es absolutamente convergente.

**Solución.** Como  $\lim_n (-1)^n \frac{3^n n!}{n^n \log(3n+2)} a_n = 7$  tomando módulos

$$\left| \lim_n (-1)^n \frac{3^n n!}{n^n \log(3n+2)} a_n \right| = 7 \implies \lim_n \frac{3^n n!}{n^n \log(3n+2)} |a_n| = 7.$$

Pero este último límite lo podemos escribir

$$\lim_n \frac{|a_n|}{\frac{3^n n!}{n^n \log(3n+2)}} = 7 \neq 0,$$

lo que significa que, aplicando el criterio de comparación,  $\sum_n |a_n| \sim \sum_n \frac{n^n \log(3n+2)}{3^n n!}$ .

Y para la segunda serie podemos aplicar el Criterio de D'Alembert del cociente:

$$\alpha = \lim_n \frac{(n+1)^{n+1} \log(3n+5)}{n^n \log(3n+2)} \frac{3^n}{3^{n+1}} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \lim_n \frac{\log(3n+5)}{\log(3n+2)} \lim_n \frac{1}{3}$$

$$= \lim_n e \lim_n \left(\frac{n+1}{n} - 1\right)^n \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{e}{3} < 1,$$

y afirmar que la series es convergente y por lo tanto  $\sum_n |a_n|$  es también lo es; lo que significa que  $\sum_n a_n$  es absolutamente convergente.

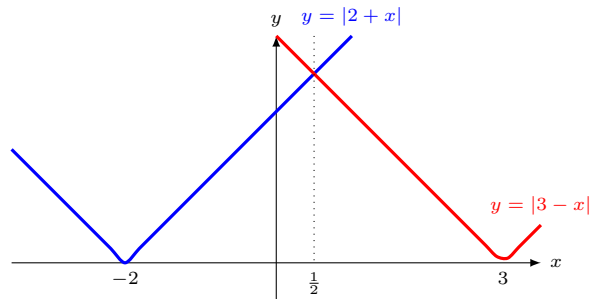
**Ejercicio 3** —10 puntos: 5 puntos cada apartado—

- 1 **Calcula, donde sea posible, el valor de la suma de la serie**  $\left(\frac{2+x}{3-x}\right) - \left(\frac{2+x}{3-x}\right)^2 + \left(\frac{2+x}{3-x}\right)^3 - \dots$   
**Indica también el intervalo de convergencia.**

**Solución.** Se trata de una serie geométrica de razón  $r = -\frac{2+x}{3-x}$  que será convergente si, y sólo si,

$$|r| = \left|\frac{2+x}{3-x}\right| < 1 \implies |2+x| < |3-x|.$$

Pero como



la función azul estará por debajo de la roja antes del punto de corte que es:

$$2+x = 3-x \iff x = \frac{1}{2},$$

con lo que el intervalo de convergencia será  $]-\infty, \frac{1}{2}[$ , en este caso la suma será:

$$\left(\frac{2+x}{3-x}\right) - \left(\frac{2+x}{3-x}\right)^2 + \left(\frac{2+x}{3-x}\right)^3 - \dots = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2+x}{3-x}\right)^n = -\frac{-\frac{2+x}{3-x}}{1 + \frac{2+x}{3-x}} = \frac{2+x}{5}.$$

- 2 **Demuestra que el polinomio**  $p(x) = x^3 - 3x + 3$  **tiene una única raíz real.**

**Solución.** Derivamos  $p'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$  y calculamos los puntos críticos:

$$p'(x) = 0 \iff x = -1, x = 1.$$

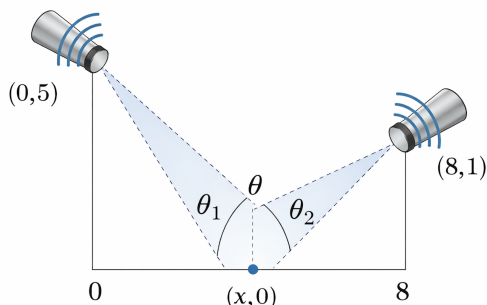
Estos puntos dividen al intervalo en tres subintervalos:  $]-\infty, -1[$ ,  $]-1, 1[$  y  $]1, +\infty[$ . En cada subintervalo el polinomio puede tener como máximo una raíz (por el Teorema de Rolle). Miramos los signos de  $p$  en los extremos:

- Como  $p(-\infty) < 0$   $p(-1) = -1 + 3 + 3 = 5 > 0$  por el Teorema de Bolzano en  $]-\infty, -1[$  hay una raíz.
- Como  $p(-1) = -1 + 3 + 3 = 5 > 0$   $p(1) = 1 - 3 + 3 = 1 > 0$  en  $]-1, 1[$  no puede haber ninguna raíz—porque si empieza en altura 5, acaba en altura 1 si hubiera una raíz debería entonces haber un mínimo en  $]-1, 1[$  y eso no puede ser—.
- Como  $p(-1) = -1 + 3 + 3 = 5 > 0$   $p(+\infty) > 0$  en  $]1, +\infty[$ , como en el caso anterior, tampoco puede haber ninguna raíz.

En definitiva el polinomio tiene una única raíz (que además está en  $]-\infty, -1[$ ).

**Ejercicio 4** —10 puntos: 1.a) 2 puntos, 1.b) 3 puntos, 2. 5 puntos—

- 1 En un modelo geométrico simplificado de adquisición por ultrasonidos, dos transductores están situados en los puntos  $(0, 5)$  y  $(8, 1)$ . Ambos emiten haces que convergen en un punto  $P = (x, 0)$ , con  $0 < x < 8$ . Sea  $\theta$  el ángulo formado por ambos haces en  $P$ , y  $\theta_1, \theta_2$  los ángulos que cada haz forma con la horizontal.



- a) Calcula el valor de  $\tan(\theta_1)$  y de  $\tan(\theta_2)$  en función de  $x$ .  
 b) Utiliza que  $\theta_1 + \theta_2 + \theta = \pi$  y la fórmula

$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tan(\theta_1) + \tan(\theta_2)}{1 - \tan(\theta_1)\tan(\theta_2)},$$

para calcular el único punto crítico de  $\theta(x)$ .

**Ayuda.**  $\frac{d}{dx} \left( \frac{40 - 4x}{x^2 - 8x + 5} \right) = \frac{4x^2 - 80x + 300}{(x^2 - 8x + 5)^2} = \frac{4(x - 5)(x - 15)}{(x^2 - 8x + 5)^2}$ .

**Solución.** a) Por trigonometría en los triángulos rectángulos:

$$\tan(\theta_1) = \frac{5}{x}, \quad \tan(\theta_2) = \frac{1}{8 - x}.$$

b) Como  $\theta_1 + \theta_2 + \theta = \pi$ , tenemos  $\theta = \pi - (\theta_1 + \theta_2)$ . Usando la fórmula:

$$\tan(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\frac{5}{x} + \frac{1}{8 - x}}{1 - \frac{5}{x} \frac{1}{8 - x}} = \frac{40 - 4x}{-x^2 + 8x - 5} =$$

Y de nuevo usando la fórmula  $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$  con lo que

$$\tan(\theta) = -\frac{40 - 4x}{-x^2 + 8x - 5} = \frac{40 - 4x}{x^2 - 8x + 5}.$$

Usando la ayuda

$$f'(x) = \frac{4(x - 5)(x - 15)}{(x^2 - 8x + 5)^2},$$

con lo que los puntos críticos son  $x = 5$  o  $x = 15$  pero como  $0 < x < 8$  el único punto crítico será  $x = 5$ .

- 2 Calcula la ecuación de la recta tangente en el origen de  $f(x) = \begin{cases} \frac{x \cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

**Solución.**

La ecuación de la recta tangente en el origen ( $x = 0$ ) es  $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ . Como por la propia definición de la función  $f(0) = 0$ , usando la definición de derivada y la regla de L'Hôpital tenemos:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x \cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \operatorname{sen}(x)}{3x^2} = -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Con lo que la ecuación de la recta tangente es  $y = -\frac{1}{3}x$ .

**Ejercicio 5** —10 puntos: 3 puntos los dos primeros apartados y 4 puntos el tercero—  
Estudia el carácter de las siguientes series numéricas:

1  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n^2+1)(n+1)}}.$

2  $\sum_n (-1)^n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right).$

3  $\sum_n \frac{1}{(n!+1)^{2n}}.$

**Solución.**

1 Por el criterio de comparación

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n^2+1)(n+1)}} \sim \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}},$$

y como esta segunda serie es una serie armónica generalizada con  $p = 3/2 > 1$  converge, con lo que la serie original también.

2 Se trata de una serie alternada a la que le podemos aplicar el criterio de Leibniz. Por una parte

$$\lim_n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log(1) = 0.$$

Y como la sucesión  $(1/n)_n$  es decreciente entonces  $(1 + 1/n)_n$  también. Pero como la función log es creciente entonces la sucesión  $(\log(1 + \frac{1}{n}))_n$  es también decreciente.

En definitiva la serie converge.

3 Aplicamos el criterio de la raíz de Cauchy. Como

$$\alpha = \lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{(n!+1)^{2n}}} = \frac{1}{(n!+1)^2} = 0 < 1,$$

la serie también converge.