

Apellidos	Nombre

Instrucciones
<ol style="list-style-type: none">1 Comienza poniendo el nombre y apellidos.2 En la pregunta de Verdadero o Falso marca claramente tu respuesta. En otro caso la pregunta no será puntuada.3 Excepto en la primera pregunta y en el primer apartado de la quinta pon todos los cálculos necesarios.4 No se puede usar ningún tipo de material de consulta ni asistentes electrónicos.5 Escribe con bolígrafo azul o negro.6 El tiempo total es de 2 horas.7 Ánimo que ya queda poco para el verano 🏖️ 🌊

Nota final

Puntuación	
Ejercicio 1	1 _____ 2 _____
Ejercicio 2	1 _____ 2 _____
Ejercicio 3	1 _____ 2 _____
Ejercicio 4	1 _____ 2 _____ 3 _____
Ejercicio 5	1 _____ 2 _____

Ejercicio 1 —10 puntos: 5 puntos cada apartado—

1 Indica si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas (no hay que justificar nada).

Las respuestas correctas suman 0.5 puntos y las incorrectas restan 0.25 puntos.

V
 F Si $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ entonces $f^{(x)}(0) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1\right) \left(\frac{1}{3} - 2\right) \cdots \left(\frac{1}{3} - 9\right) \left(\frac{1}{3} - 10\right)$.

V
 F Si $f(x) = \frac{1}{1-x}$ entonces $f^{(x)}(0) = 10!$.

V
 F Si una serie de Taylor de centro $a = 1$ es convergente en $x = -1$ y divergente en $x = 3$ entonces la serie de la derivada convergerá, al menos, en $] -1, 3[$.

V
 F Si una serie de Taylor de centro $a = 1$ es divergente en $x = 3$ y convergente en $x = 0$ entonces el radio de convergencia de la serie integral es mayor o igual que 1.

V
 F $\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2(x) dx = \frac{\pi}{2}$.

V
 F La ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^2$ en el punto $(1, 1, 2)$ es $2x + 2y - z - 2 = 0$.

V
 F Si $f(x, y) = x^2 - y^2$ entonces $D_{(1,-1)} f(x, y) = \sqrt{2}(x + y)$.

V
 F La suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{10}{n}$ es $2^{10} - 1$.

V
 F La suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!}$ es $\frac{1 - e^2}{e^2}$.

V
 F La suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/3}{n} 2^n$ es $\sqrt[3]{2}$.

2 El Teorema Fundamental del Cálculo I (o **Regla de Barrow**) asegura que si F es una primitiva de una función continua, f , en $[a, b]$ entonces:

$$\int_a^b f(x) dx =$$

Para la demostración tomamos una partición $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$ de forma que $x_0 =$ y que $x_n =$. Aplicando entonces el Teorema en cada intervalo $]x_{k-1}, x_k[$ y a la función podemos encontrar unos puntos $x_k^* \in]x_{k-1}, x_k[$ de forma que:

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) =$$
 (usa sólo F),

que teniendo en cuenta que F es una primitiva de f podemos escribir también:

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) =$$
 (aquí usa f).

De esta manera tenemos unos rectángulos que tendrán bases de longitudes y alturas . El área de cada rectángulo será $A_k =$. Pero entonces la suma de las áreas de estos rectángulos aproxima a la integral y el límite será el valor de dicha integral. Es decir:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n A_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1})).$$

Y para obtener el resultado basta tener en cuenta que $\sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1})) =$

Ejercicio 2 —10 puntos: 8 puntos el primer apartado y 2 el segundo—

1 Calcula el dominio de convergencia de la serie $\sum_n \frac{x^{5n}}{4^n n}$.

- 2 *Calcula, usando un polinomio de MacLaurin de segundo grado, una aproximación de $\sqrt{0.1}$ (no hace falta que estimes el error cometido).*

Ejercicio 3 —10 puntos: 5 puntos cada apartado—

- 1 Calcula el desarrollo de MacLaurin de la función $f(x) = \frac{1}{(7+3x)^3}$, indicando el radio de convergencia de la serie obtenida.

2 Calcula $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k/n)^2 + (k/n) + 1}$.

Ejercicio 4 —3 puntos los dos primeros apartados y 4 puntos el último—

- 1 A **Ainara** le gusta siempre pedir el trocito final del cono de un cucurucho de helado que está relleno de chocolate. Si el trozo de cono completamente relleno de chocolate mide 0.75cm (mejor usa que $0.75 = 3/4$) de altura y tiene un radio de 2cm . ¿Cuál sería el volumen de chocolate?—Mi *versión pro con modelo o3* de CHATGPT dice que π , ¿será verdad?—
- 2 Si en lugar de forma cónica el cucurucho tuviera forma de paraboloides elíptico y con las mismas dimensiones, mi *versión pro con modelo o3* de CHATGPT dice que **Ainara** comería casi un 50% más de chocolate—exactamente una diferencia de volumen de $\pi/2$ —. ¿Crees que es verdad? Justifica tu respuesta.

3 Calcula la longitud de la curva $f(x) = \frac{x^4 + 3}{6x}$ en el intervalo $[1, 3]$.

—La solución que dice ahora el vídeo de TikTok del que he sacado este problema es $14/3$, ¿será fiable esta fuente?—.

Ejercicio 5 —10 puntos: 2 puntos el primer apartado y 8 el segundo—

1 Escribe la ecuación (o ecuaciones) que describan las siguientes figuras geométricas en \mathbb{R}^3 :

(1) Cono de vértice en $(0, 0, 1)$ y de sección a la altura del plano $z = 0$ una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1:

(2) Paraboloide elíptico de vértice en $(0, 0, 1)$ y de sección a la altura del plano $z = 0$ una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1:

(3) Cilindro de centro en el punto $(1, -1, 0)$ y de sección (perpendicular al eje OZ) una circunferencia de radio 2:

(4) Circunferencia de centro $(-1, 2, 0)$ y radio 5 situada en el plano OXY :

2 Considera la función $f(x, y) = (x - 1 + y^2) \int_0^y e^{-t^2} dt$.

(a) Demuestra que f es diferenciable en el punto $(0, 0)$.

(b) Calcula la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en $(0, 0, 0)$.

(c) Calcula la derivada direccional mínima de f en $(0, 0)$.

(d) Estudia y clasifica el extremo relativo de f . (**Ayuda: para la clasificación NO necesitas calcular TODAS las derivadas parciales de segundo orden**).